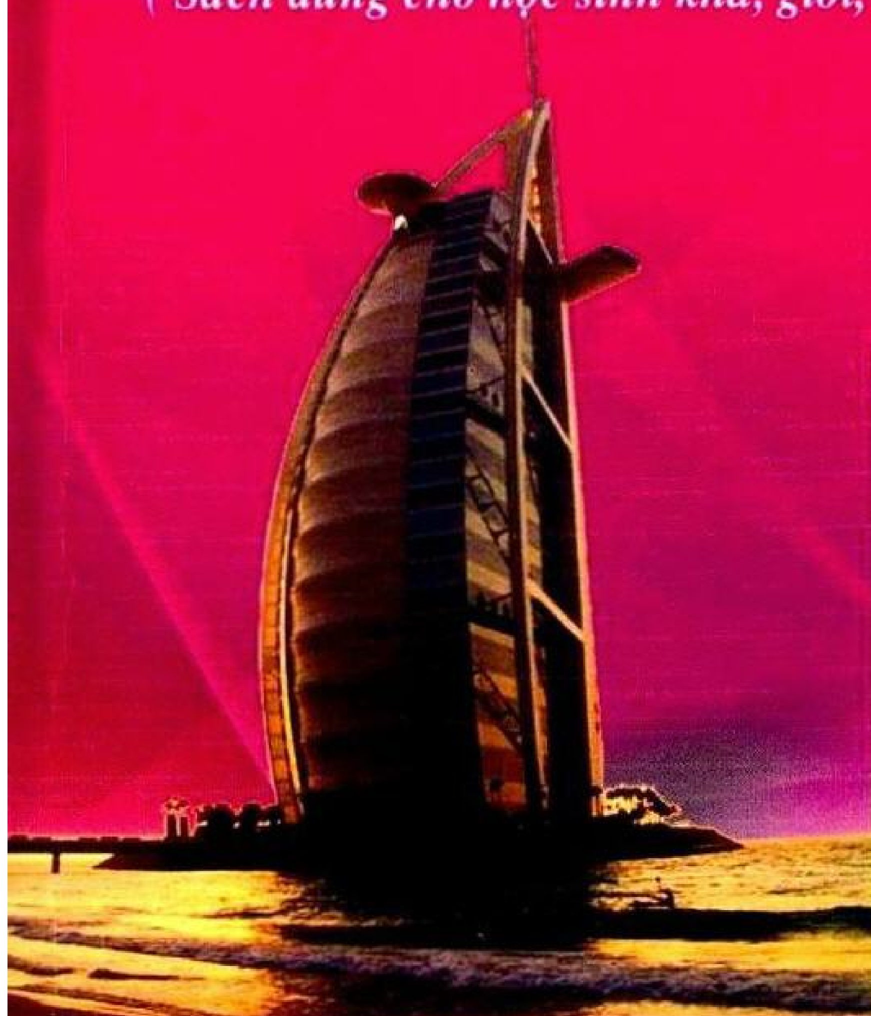
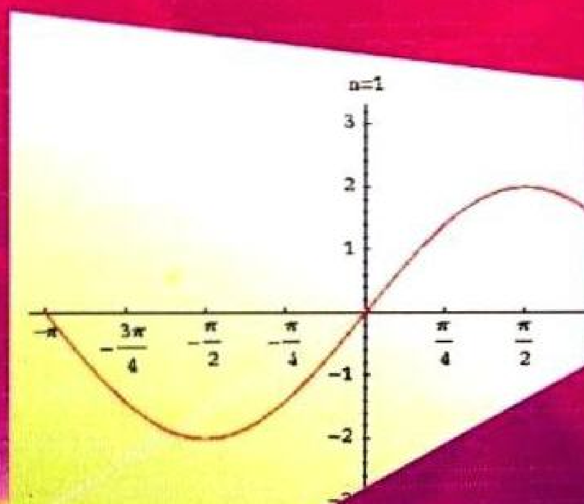
PGS. TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
ThS NGUYỄN DƯƠNG HOÀNG - ThS HOÀNG NGỌC CẢNH - NGUYỄN NGỌC GIANG

CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐIỂN HÌNH GIẢI TOÁN NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

(Sách dùng cho học sinh khá, giỏi, học sinh chuyên Toán)

Kiến thức cơ bản
Các dạng toán điển hình
Toán tự luyện
Đáp số và hướng dẫn giải







NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PGS. TS. NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
ThS. NGUYỄN DƯƠNG HOÀNG - ThS. HOÀNG NGỌC CẢNH - NGUYỄN NGỌC GIANG

CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐIỂN HÌNH
GIẢI TOÁN NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Sách dùng cho học sinh khá, giỏi, học sinh chuyên Toán

- **Kiến thức cơ bản**
- **Các dạng toán điển hình**
- **Toán tự luyện**
- **Đáp số và hướng dẫn giải**

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách **"Các phương pháp điển hình giải toán nguyên hàm, tích phân và ứng dụng"** tập thể các giáo viên đã và đang dạy các trường chuyên, lớp chọn tham gia biên soạn. Vì vậy cuốn sách không những là tài liệu tham khảo cần thiết cho học sinh đang học chủ đề này, học sinh ôn thi các kì thi quốc gia, các kì thi vô địch toán mà còn là tài liệu tham khảo bổ ích cho giáo viên, phụ huynh học sinh, sinh viên các trường sư phạm quan tâm nghiên cứu chủ đề nguyên hàm, tích phân. Cuốn sách trình bày các kiến thức cơ bản, nâng cao và các ứng dụng đa dạng của các kiến thức nguyên hàm, tích phân trong giải toán trung học phổ thông.

Cuốn sách gồm ba chương.

Chương I. Nguyên hàm.

Chương II. Tích phân.

Chương III. Ứng dụng của tích phân.

Mỗi chương gồm các mục (§) có cấu trúc chung như sau :

A. Kiến thức cơ bản. Trình bày các khái niệm, định lí, tính chất cơ bản và nâng cao mà học sinh cần phải hiểu và ghi nhớ.

B. Các dạng toán điển hình. Trình bày các dạng toán, phương pháp giải kèm theo các ví dụ minh họa. Trong các ví dụ khó còn nêu gợi ý về cách sử dụng kiến thức và quy trình giải trước khi nêu lời giải.

C. Toán tự luyện. Giúp học sinh luyện kĩ năng giải các dạng toán nêu ở phần B và các bài toán nâng cao đánh dấu "*".

D. Đáp số và hướng dẫn giải. Trình bày các gợi ý về cách giải và kết quả của các bài toán tự luyện ở phần C.

Việc sử dụng cuốn sách nên thực hiện theo trình tự sau :

Sau khi đọc kỹ kiến thức cơ bản các em nên ***TỰ MÌNH*** giải các ví dụ theo chỉ dẫn phương pháp của dạng toán tương ứng. Nếu gặp khó khăn có thể tham khảo lời giải mẫu. Tiếp theo nên dành thời gian để giải các bài tập tự luyện. Khi giải các bài tập này cần chú ý xác định dạng và phương pháp giải phù hợp. Cuối cùng nên tự mình tổng kết lại các kiến thức và phương pháp đặc trưng cần ghi nhớ khi giải các bài tập trong mục tương ứng.

Các bài toán được lựa chọn theo tiêu chí "hay và khó", trong đó nhiều bài toán là đề thi đại học, đề thi vô địch toán Quốc gia và Quốc tế. Vì vậy các em sẽ gặp không ít khó khăn khi giải các bài toán đó, tuy nhiên tính "đặc trưng" của phương pháp giải lại được biểu lộ rõ ràng hơn bao giờ hết ở chính các bài toán này.

Mặc dù được biên soạn cẩn thận, nhưng chắc chắn khó tránh khỏi những khiếm khuyết, các tác giả rất mong nhận được sự góp ý của các bậc phụ huynh, các thầy cô giáo và các em học sinh để cuốn sách được hoàn thiện hơn trong lần tái bản sau.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ : Ông Nguyễn Văn Lộc 229/85 Thích Quảng Đức, Phường 4 Quận Phú Nhuận –Thành phố Hồ Chí Minh. Điện thoại NR: (08) 38476771.

Xin trân trọng cám ơn!

Các tác giả

CHƯƠNG I. NGUYÊN HÀM

§1. Khái niệm nguyên hàm và các tính chất

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN.

1. Khái niệm nguyên hàm.

a) Định nghĩa.

Cho hàm số f xác định trên K. Hàm số F được gọi là nguyên hàm của f trên K nếu F'(x) = f(x) với mọi x thuộc K.

Chú ý.

1) Trong trường hợp K = [a; b], các đẳng thức F'(a) = f(a), F'(b) = f(b) được hiểu là $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a)$ và $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b)$

2) Cho hai hàm số f và F liên tục trên đoạn [a; b]. Nếu F là nguyên hàm của f trên khoảng (a; b) thì có thể chứng minh được rằng F'(a) = f(a) và F'(b) = f(b), do đó F cũng là nguyên hàm của f trên đoạn [a; b].

b) Định lí 1.

Giả sử hàm số F là một nguyên hàm của hàm số f trên K. Khi đó:

a) Với mỗi hằng số C, hàm số y = F(x) + C cũng là một nguyên hàm của f trên K

b) Ngược lại, với mỗi nguyên hàm G của f trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho G(x) = F(x) + C với mọi x thuộc K.

2. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp.

1) $\int 0dx = C$, $\int dx = \int 1dx = x + C$;

2) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$;

3) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$;

4) Với k là hằng số khác 0.

a) $\int \sin kx dx = -\dfrac{\cos kx}{k} + C$;

b) $\int \cos kx dx = \dfrac{\sin kx}{k} + C$;

c) $\int e^{kx} dx = \dfrac{e^{kx}}{k} + C$;

d) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$;

5) a) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$;

b) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$.

3. Một số tính chất cơ bản của nguyên hàm.

Định lí 2.

Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì:

a) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

b) Với mọi số thực $k \neq 0$ ta có: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

B. CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH.

DẠNG 1. TÌM NGUYÊN HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ BẰNG CÁCH DÙNG ĐẠO HÀM

Phương pháp.

Sử dụng định nghĩa nguyên hàm:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của $F(x) = (x^2 - 1)\ln|1 + x| - x^2\ln|x|$

Suy ra nguyên hàm của $f(x) = x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)^2$.

Giải

Ta có $F(x) = (x^2 - 1)\ln|1 + x| - x^2\ln|x|$

$\Rightarrow F'(x) = 2x\ln|1 + x| + \frac{x^2 - 1}{1 + x} - 2x\ln|x| - x$

$= 2x\ln|1 + x| - 1 - 2x\ln|x|$ (1)

(với $x \neq 0$ và $x \neq 1$)

Ta có: $f(x) = x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)^2 = x\ln\left|\frac{1+x}{x}\right|^2 = 2x\ln\left|\frac{1+x}{x}\right|$

$= 2x(\ln|1 + x| - \ln|x|)$

$= 2x\ln|1 + x| - 2x\ln|x|$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $f(x) = F'(x) + 1$

$\Rightarrow \int f(x)dx = \int F'(x)dx + \int 1dx = F(x) + x + C$

$= (x^2 - 1)\ln|1 + x| - x^2\ln|x| + x + C$

Vậy nguyên hàm $f(x) = x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)^2$ là:

$F(x) = (x^2 - 1)\ln|1 + x| - x^2\ln|x| + x + C$.

Ví dụ 2. Cho $y = e^x(2x^2 - 3x)$. Chứng tỏ rằng $y'' - 2y' + y = 4e^x$. Suy ra rằng $4e^x + 2y - y'$ là một nguyên hàm của y.

Giải

$\forall x \in \mathbf{R}$: $y' = e^x(2x^2 - 3x) + e^x(4x - 3) = e^x(2x^2 + x - 3)$

$y'' = e^x(2x^2 + x - 3) + e^x(4x + 1) = e^x(2x^2 + 5x - 2)$.

Vậy: $y'' - 2y' + y = e^x(2x^2 + 5x - 2) - 2e^x(2x^2 + x - 3) + e^x(2x^2 - 3x)$

$= 4e^x$ (đpcm) (1)

Đặt $F(x) = 4e^x + 2y - y'$. Ta chứng minh $F'(x) = y$.

Thật vậy: $F'(x) = 4e^x + 2y' - y''$ (2)

Nhưng theo (1): $y'' - 2y' + y = 4e^x \Leftrightarrow 4e^x + 2y' - y'' = y$

Nghĩa là ở (2) ta có $F'(x) = y$ (đpcm).

Nói cách khác $4e^x + 2y - y'$ là một nguyên hàm của y.

Ví dụ 3.

Tính đạo hàm của $\varphi(x) = (ax + b)e^x$ rồi suy ra nguyên hàm của $y = -xe^x$.

Giải

Từ giả thiết: $\varphi(x) = (ax + b)e^x$

$\Rightarrow \varphi'(x) = (a + ax + b)e^x$.

Với $a = -1, b = 1$ thì $\varphi(x) = (-x + 1)e^x$; $\varphi'(x) = -xe^x$.

Vậy nguyên hàm của $y = -xe^x$ là $F(x) = (-x + 1)e^x + C$.

Ví dụ 4. Cho $f(x) = x\ln\left(\frac{x}{4}\right)$ và $g(x) = x^2\ln\left(\frac{x}{4}\right)$; $(x > 0)$

1) Chứng tỏ rằng $f(x) = \frac{1}{2}g'(x) - \frac{1}{2}x$.

2) Suy ra một nguyên hàm F(x) của f(x).

Giải

1) $g'(x) = 2x\ln\left(\frac{x}{4}\right) + x$ (do $x > 0$)

$\Rightarrow 2x\ln\left(\frac{x}{4}\right) = g'(x) - x \Rightarrow x\ln\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2}g'(x) - \frac{x}{2}$.

Vậy $f(x) = \frac{1}{2}g'(x) - \frac{x}{2}$ (*)

2) Từ (*) ta có:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\int g'(x)dx - \frac{1}{2}\int xdx$$

$$= \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x^2}{4} + C.$$

Vậy một nguyên hàm của f(x) là:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x^2}{4} + C.$$

DẠNG 2. TÌM HÀM SỐ BIẾT NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ ĐÓ

Phương pháp.

Dùng tính chất $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$.

Thật vậy: $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Ta có: $d(F(x) + C) = d\,F(x) = F'(x)dx$.

$\Leftrightarrow d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$

Vậy: $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$

Ví dụ 1. Hãy xác định hàm số f(x) biết rằng:

a) $\int f(x)dx = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^2} + C$

b) $\int f(x)dx = \sin x.\cos y + C$

c) $\int f(x)dx = e^x + e^y + C$

Giải

a) Ta có: $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^2} + C\right)' = -\frac{3x^2}{x^6} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{x^4}$.

b) $\left(\int f(x)dx\right)' = (\sin x.\cos y + C)' \Leftrightarrow f(x) = \cos x.\cos y$

c) $\left(\int f(x)dx\right)' = (e^x + e^y + C)' \Leftrightarrow f(x) = e^x$.

Ví dụ 2. Hãy xác định f(x) từ những đẳng thức sau:

a) $y^3 + 2y^2 + y + C = \int f(y)dy$

b) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^3} + C = \int f(y)dy$

c) $\sin u \cos v + C = \int f(u)du$

d) $e^u + e^{2v} + C = \int f(v)dv$.

Giải

a) Ta có: $\frac{d}{dy}\left(\int f(y)dy\right) = f(y)$

$\Rightarrow \frac{d}{dy}(y^3 + 2y \;\; + y + C) = f(y) = 3y^2 + 4y + 1, \quad \forall y$

$\Rightarrow f(x) = 3x^2 + 4x + 1$.

b) Tương tự:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^3}+C\right)=\frac{d}{dy}\left(\int f(y)dy\right)=f(y)=-\frac{3}{y^4} \quad \text{nên } f(x)=-\frac{3}{x^4}.$$

c) $$\frac{d}{du}(\sin u\cos v+C)=\frac{d}{du}\left(\int f(u)du\right)=f(u)$$
$$=\cos v\cos u \Rightarrow f(x)=\cos v\cos x.$$

d) $$\frac{d}{dv}(e^u+e^{2v}+C)=\frac{d}{dv}\left(\int f(v)dv\right)=f(v)$$
$$=2e^{2v} \Rightarrow f(x)=2e^{2x}.$$

DẠNG 3. ĐƯA HÀM SỐ VÀO DẤU VI PHÂN ĐỂ TÍNH NGUYÊN HÀM

Phương pháp.

Sử dụng tính chất:
Nếu $\int f(x)dx=F(x)+C$ thì $\int f(u)du=F(u)+C$.

Ví dụ 1. Tính **a)** $\int x\cos(x^2)dx$; **b)** $\int (x^2-3x+1)^{10}(2x-3)dx$;

c) $\int (\ln t)^4\frac{dt}{t}$; **d)** $\int e^{3\sin x}\cos xdx$;

e) $\int \cos^2 xdx$; **f)** $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$.

Giải

a) $\int x\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\int\cos(x^2)d(x^2)=\frac{1}{2}\sin(x^2)+C \quad (u=x^2)$

b) $$\int (x^2-3x+1)^{10}(2x-3)dx=\int (x^2-3x+1)^{10}d(x^2-3x+1)$$
$$=\frac{(x^2-3x+1)^{11}}{11}+C \qquad (u=x^2-3x+1)$$

c) $\int (\ln t)^4\frac{dt}{t}=\int(\ln t)^4 d(\ln t)=\frac{(\ln t)^5}{5}+C$;

d) $\int e^{3\sin x}\cos xdx=\frac{1}{3}\int e^{3\sin x}d(3\sin x)=\frac{1}{3}e^{3\sin x}+C \quad (u=3\sin x)$;

e) Xét $\int\cos^2 xdx$. Do $\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ nên:

$$\int\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx$$
$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int\cos 2xd(2x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C \quad (u=2x)$$

f) Xét $I=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$. Đặt $J=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

Ta có: $I + J = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x + C$ (1)

$$I - J = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -\int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x}$$

$$= -\ln|\sin x + \cos x| + C \quad (2)$$

Giải hệ gồm (1) và (2) ta được:

$$I = \frac{1}{2}\left(x - \ln|\sin x + \cos x|\right) + C$$

$$J = \frac{1}{2}\left(x + \ln|\sin x + \cos x|\right) + C.$$

Ví dụ 2. Tìm họ nguyên hàm của:

a) $f(x) = \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$; **b)** $g(x) = \cos x.\cos 2x.\sin 4x$.

Giải

a) $f(x) = \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2x(x - \sqrt{x^2 - 1})}{x^2 - (x^2 - 1)} = 2x^2 - 2x\sqrt{x^2 - 1}$.

Suy ra họ nguyên hàm của f(x) là:

$$\int f(x)dx = \int (2x^2 - 2x\sqrt{x^2 - 1})dx = 2\int x^2dx - \int (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}d(x^2 - 1)$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1} + C.$$

b) $g(x) = \cos x.\cos 2x.\sin 4x = \cos x.\frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x)$

$$= \frac{1}{2}\cos x.\sin 6x + \frac{1}{2}\cos x.\sin 2x$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}(\sin 7x + \sin 5x) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)$$

$$= \frac{1}{4}[\sin 7x + \sin 5x + \sin 3x + \sin x].$$

Vậy họ nguyên hàm của g(x) là:

$$\int g(x)dx = \frac{1}{4}\int [\sin 7x + \sin 5x + \sin 3x + \sin x]dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int \frac{1}{7}\sin 7x d(7x) + \int \frac{1}{5}\sin 5x d(5x) + \int \frac{1}{3}\sin 3x d(3x) + \int \sin xdx\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 5x}{5} + \frac{\cos 3x}{3} + \cos x\right] + C.$$

DẠNG 4. CHỨNG MINH HÀM SỐ F(x) LÀ MỘT NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ f(x)

Phương pháp.

- Chứng minh $F'(x) = f(x), \forall x \in D$.
- Sử dụng tính chất của nguyên hàm và đa thức đồng nhất.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng: $F(x) = \tan^4 x + 3x - 5$ là 1 nguyên hàm của $f(x) = 4\tan^5 x + 4\tan^3 x + 3$.

Giải

$F(x) = \tan^4 x + 3x - 5$

$\Rightarrow F'(x) = 4\tan^3 x(\tan x)' + 3 = 4\tan^3 x(\tan^2 x + 1) + 3$

$= 4\tan^5 x + 4\tan^3 x + 3 = f(x)$

Vậy: F(x) là 1 nguyên hàm của f(x).

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số: $f(x) = \dfrac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}$ có họ nguyên hàm dạng: $F(x) = Ax + B\ln|c\sin x + d\cos x| + K$.

Giải

Điều kiện tồn tại hàm số f(x) là $c\sin x + d\cos x \neq 0$.

Gọi X là miền xác định hàm f(x). Điều kiện hiển nhiên là $c^2 + d^2 > 0$. Khi đó, ta sẽ chứng minh tồn tại các số A, B sao cho $F'(x) = f(x)$, với mọi $x \in X$.

Ta có: $F'(x) = A + B\dfrac{c\cos x - d\sin x}{c\sin x + d\cos x}$

$$F'(x) = \frac{Ac\sin x + Ad\cos x + Bc\cos x - Bd\sin x}{c\sin x + d\cos x}$$

$$= \frac{(Ac - Bd)\sin x + (Ad + Bc)\cos x}{c\sin x + d\cos x}.$$

Vậy F(x) là 1 nguyên hàm của f(x) nếu và chỉ nếu:

$$\begin{cases} Ac - Bd = a \\ Ad + Bc = b \end{cases} \quad (\text{với } d^2 + c^2 > 0)$$

Giải hệ này ta được: $A = \dfrac{\begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}$; $B = \dfrac{\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}}{c^2 + d^2} = \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}$.

Nói cách khác, với $f(x) = \dfrac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}$ với $c^2 + d^2 > 0$, thì f(x) có họ nguyên hàm dạng: $F(x) = Ax + B\ln|c\sin x + d\cos x| + K$ với A, B được chọn như trên và K tùy ý.

Ví dụ 3. Cho 2 hàm số: $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$

$F(x) = mx^3 + (3m + 2)x^2 - 4x + 3$.

Định m để F(x) là nguyên hàm của f(x).

Giải

Ta có: $F'(x) = 3mx^2 + 2(3m + 2)x - 4$.

Để F(x) là 1 nguyên hàm của f(x) thì:

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow 3mx^2 + 2(3m + 2)x - 4 = 3x^2 + 10x - 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 3 \\ 2(3m + 2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy: m = 1.

Ví dụ 4. Cho 2 hàm số: $F(x) = (ax^2 + bx + c).\sqrt{x^2 - 4x}$.

$$f(x) = (x - 2).\sqrt{x^2 - 4x}.$$

Định a, b, c để F(x) là 1 nguyên hàm của f(x).

Giải

Ta có: $F'(x) = (2ax + b).\sqrt{x^2 - 4x} + (ax^2 + bx + c).\dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x}}$

$$= \frac{3ax^3 + 2(b - 5a)x^2 + (c - 6b)x - 2c}{\sqrt{x^2 - 4x}}$$

Để F(x) là 1 nguyên hàm của f(x) thì:

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{3ax^3 + 2(b - 5a)x^2 + (c - 6b)x - 2c}{\sqrt{x^2 - 4x}} = \frac{(x - 2)(x^2 - 4x)}{\sqrt{x^2 - 4x}}$$

$$\Leftrightarrow 3ax^3 + 2(b - 5a)x^2 + (c - 6b)x - 2c = x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 2(b - 5a) = -6 \\ c - 6b = 8 \\ -2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = -\dfrac{4}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

DẠNG 5. TÌM NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Phương pháp.

- Dùng bảng công thức để tính họ nguyên hàm của hàm số f(x) có dạng: F(x) + C (1)
- Dùng điều kiện đã cho để tìm hằng số C.
- Thay C vào (1) ta được 1 nguyên hàm phải tìm.

Ví dụ 1. Tìm 1 nguyên hàm F(x) của hàm số:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 1}{x^3}$ biết rằng $F(2) = -5$.

b) $f(x) = 2x(x^2 + 1)^3$ biết rằng $F(-1) = 3$.

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{(x - 1)^2}$ biết rằng $F(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Giải

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 1}{x^3} = 1 + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$

$F(x) = x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + C \Rightarrow F(2) = 2 - 1 + \dfrac{1}{8} + C = -5 \Leftrightarrow C = -\dfrac{49}{8}$.

Vậy $F(x) = x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{49}{8}$.

b) $f(x) = 2x(x^2 + 1)^3 = (x^2 + 1)^3.(x^2 + 1)'$

$F(x) = \dfrac{(x^2 + 1)^4}{4} + C \Rightarrow F(-1) = 4 + C = 3 \Leftrightarrow C = -1$.

Vậy: $F(x) = \dfrac{(x^2 + 1)^4}{4} - 1$.

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{(x - 1)^2} = \dfrac{(x - 1)^3 - 4}{(x - 1)^2} = x - 1 - \dfrac{4}{(x - 1)^2}$

$F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{4}{x - 1} + C \Rightarrow F(0) = -4 + C = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow C = \dfrac{7}{2}$.

Vậy: $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{4}{x - 1} + \dfrac{7}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm 1 nguyên hàm của hàm số:

a) $f(x) = \sin 2x + 3x^2$ biết rằng $F(0) = 2$.

b) $f(x) = \left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2$ biết rằng $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

c) $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)$ biết rằng $F(0) = 0$.

Giải

a) $f(x) = \sin 2x + 3x^2$

$F(x) = -\dfrac{\cos 2x}{2} + x^3 + C \Rightarrow F(0) = -\dfrac{1}{2} + C = 2 \Leftrightarrow C = \dfrac{5}{2}$.

Vậy: $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + x^3 + \dfrac{5}{2}$.

b) $f(x) = \left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 = 1 + \sin x$

$F(x) = x - \cos x + C \Rightarrow F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} + C = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow C = 0$.

Vậy: $F(x) = x - \cos x$.

c) $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)$

$F(x) = 4\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) + C \Rightarrow F(0) = 4\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + C = 0 \Leftrightarrow 4\left(-\dfrac{1}{2}\right) + C = 0$

$\Leftrightarrow C = 2$.

Vậy: $F(x) = 4\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 2$.

DẠNG 6. TÌM NGUYÊN HÀM TRỰC TIẾP BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

Phương pháp.

– Để tính $\int f(x)dx$, ta phân tích hàm số dưới dấu tích phân thành tổng đại số các hàm số rồi áp dụng công thức tìm nguyên hàm của các hàm số cơ bản.

Cần chú ý hai tính chất: $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Đặc biệt cần chú ý một số điểm:

– Nếu gặp phân số dạng $\frac{1}{x^n}$ ta viết thành x^{-n}.

– Nếu gặp căn số ta chuyển về dạng mũ phân theo công thức $\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$ ($q \neq 0$ và p bất kỳ $\in$ R).

– Nếu gặp một phân số hữu tỉ có bậc ở tử số lớn hơn ở mẫu số, ta lấy tử số chia cho mẫu số để đưa về dạng tổng số rồi lấy tích phân của tổng số đó.

Ví dụ 1. Tìm họ nguyên hàm của hàm số:

a) $f(x) = \frac{x^4 - 2}{x^3 - x}$; **b)** $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$.

(Đại học Ngoại thương Hà Nội – 1998, chuyên ban)

Giải

a) Phân tích hàm số f(x), ta có:

$$f(x) = \frac{x^4 - 2}{x^3 - x} = \frac{x^4 - x^2 + x^2 - 1 - 1}{x(x^2 - 1)} = \frac{x^2(x^2 - 1) + (x^2 - 1) - 1}{x(x^2 - 1)}$$

$$= x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = x + \frac{1}{x} - \frac{x^2 + 1 - x^2}{x(x-1)(x+1)} = x + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 - 1} + \frac{1}{x}.$$

Ta có: $I = \int \frac{x^4 - 2}{x^3 - x}dx = \int \left(x + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 - 1} + \frac{1}{x}\right)dx$

$$= \int xdx + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2 - 1} + \int \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 - 1)}{x^2 - 1} + C$$

$$I = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + C.$$

b) Ta có:

$$I = \int \frac{dx}{x^3 - x} = \int \frac{x^2 + (1 - x^2)}{x(x^2 - 1)}dx = \int \frac{x^2}{x(x^2 - 1)}dx - \int \frac{x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}dx$$

$$= \int \frac{xdx}{(x^2 - 1)} - \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 - 1)}{x^2 - 1} - \ln|x| + C$$

$$I = \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| - \ln|x| + C.$$

Ví dụ 2. Tính nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \tan x + \dfrac{1}{\sqrt{2x + 1} + \sqrt{2x - 1}}$.

(Đại học Kinh tế Quốc dân – 1999)

Giải

Ta có: $I = \int \left(\tan x + \dfrac{1}{\sqrt{2x + 1} + \sqrt{2x - 1}}\right)dx$

$$= \int \tan x dx + \int \frac{1}{\sqrt{2x + 1} + \sqrt{2x - 1}}dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} + \int \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{2x - 1}}{2}dx$$

$$= \int \frac{-d\cos x}{\cos x} + \frac{1}{2}\int \sqrt{2x + 1}dx - \frac{1}{2}\int \sqrt{2x - 1}dx$$

$$= -\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\int (2x + 1)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}d(2x + 1) - \frac{1}{2}\int (2x - 1)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}d(2x - 1)$$

$$= -\ln|\cos x| + \frac{1}{6}(2x + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}(2x - 1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Vậy họ nguyên hàm của hàm số f(x) là:

$$I = -\ln|\cos x| + \frac{1}{6}\left[(2x + 1)^{\frac{3}{2}} - (2x - 1)^{\frac{3}{2}}\right] + C$$

Ví dụ 3. a) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^3x.\cos3x$.

b) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2x.\cos2x$.

(Đại học Ngoại thương cơ sở II – 1998, khối D).

Giải

a) Ta có: $\cos^3x.\cos3x = \dfrac{1}{4}(3\cos x + \cos3x)\cos3x = \dfrac{1}{4}(3\cos3x\cos x + \cos^2 3x)$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}(\cos 4x + \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 6x\right] = \frac{1}{8}(3\cos4x + 3\cos2x + 1 + \cos6x)$$

$$\int \cos^3 x \cos 3x\, dx = \int \frac{1}{8}(3\cos4x + 3\cos2x + 1 + \cos6x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\sin 4x + \frac{3}{2}\sin 2x + x + \frac{1}{6}\sin 6x\right) + C.$$

Họ nguyên hàm của hàm số f(x) là:

$$F(x) = \frac{1}{8}\left(x + \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{3}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x\right) + C.$$

b) $f(x) = \cos^2 x.\cos 2x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}\cos 2x = \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{2}.\dfrac{1+\cos 4x}{2}$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

Ta có: $\int \cos^2 x.\cos 2x dx = \int \frac{1}{2}\cos 2x dx + \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 4x dx$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\sin 4x + C.$$

Họ nguyên hàm của hàm số $\cos^2 x.\cos 2x$ là:

$$F(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + C.$$

Ví dụ 4. Tính họ nguyên hàm: $I = \int \dfrac{dx}{e^x - 4e^{-x}}$.

(Đại học Quốc gia Hà Nội – 1999, khối D).

Giải

Ta có: $I = \int \dfrac{dx}{e^x - 4e^{-x}}$

Biến đổi: $\dfrac{1}{e^x - 4e^{-x}} = \dfrac{e^x}{e^{2x} - 4} = \dfrac{e^x}{e^{2x} - 2^2} = \dfrac{e^x}{(e^x - 2)(e^x + 2)}$. (1).

Biết $de^x = e^x dx$ nên từ (1) ta suy ra:

$$I = \int \frac{dx}{e^x - 4e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{(e^x - 2)(e^x + 2)} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{e^x - 2} - \frac{1}{e^x + 2}\right) d(e^x)$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d(e^x - 2)}{e^x - 2} - \frac{1}{4}\int \frac{d(e^x + 2)}{e^x + 2} = \frac{1}{4}\ln\left|e^x + 2\right| - \frac{1}{4}\ln\left|e^x - 2\right| + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x + 2}{e^x - 2}\right| + C.$$

Họ nguyên hàm của $\int \dfrac{dx}{e^x - 4e^{-x}}$ là: $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{e^x + 2}{e^x - 2}\right| + C.$

C. TOÁN TỰ LUYỆN.

Bài 1. Chứng minh rằng hàm số: $F(x) = |x| - \ln(1 + |x|)$ là 1 nguyên hàm trên R của hàm số: $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.

Bài 2. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \dfrac{\cos x + \sin x.\cos x}{2 + \sin x}$.

(Đại học Ngoại thương TP.Hồ Chí Minh – 1997)

Bài 3. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \dfrac{\ln(ex)}{3 + x\ln x}$.

(Học viện Quan hệ Quốc tế – 1996)

Bài 4. Chứng tỏ hàm số: $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ là một nguyên hàm

của hàm số: $f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

(Đại học Y dược, TP.HCM – 1994)

D. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 1. – Với $x > 0$: $F(x) = x - \ln(1 + x)$; $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

Ta có: $F'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} = f(x)$.

– Với $x < 0$: $F(x) = -x - \ln(1 - x)$; $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

$$F'(x) = -1 + \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x} = f(x).$$

$F'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x} = 1 - \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 - 1 = 0 = f(0^+)$.

$F'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x - \ln(1-x)}{x} = -1 - \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1 + 1 = 0 = f(0^-)$.

$\Rightarrow F'(0^+) = F'(0^-) = f(0)$. $\Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in R$.

Vậy: F(x) là 1 nguyên hàm của f(x) trên R.

Bài 2. Ta có: $f(x) = \dfrac{\cos x + \sin x.\cos x}{2 + \sin x} = \dfrac{2\cos x + \sin x.\cos x - \cos x}{2 + \sin x}$

$$= \frac{\cos x(2 + \sin x) - \cos x}{2 + \sin x} = \cos x - \frac{\cos x}{2 + \sin x}.$$

Do đó: $\displaystyle\int f(x)dx = \int\left(\cos x - \frac{\cos x}{2 + \sin x}\right)dx = \int \cos x dx - \int \frac{\cos x}{2 + \sin x}dx$

$$= \int \cos x dx - \int \frac{d(2 + \sin x)}{2 + \sin x} = \sin x - \ln(2 + \sin x) + C.$$

Họ nguyên hàm của hàm số f(x) là: $\sin x - \ln(2 + \sin x) + C$.

Bài 3. Ta có: $\ln(ex) = \ln e + \ln x = 1 + \ln x$

và $d(3 + x\ln x) = \left(\ln x + \dfrac{1}{x}x\right)dx = (\ln x + 1)x$.

Do đó: $I = \displaystyle\int f(x)dx = \int \frac{1 + \ln x}{3 + x\ln x}\left(\frac{d(3 + x\ln x)}{1 + \ln x}\right) = \int \frac{d(3 + x\ln x)}{3 + x\ln x}$

$= \ln|3 + x\ln x| + C$.

Bài 4. Ta phải chứng minh: $F'(x) = f(x)$ với $\forall x \geq 0$.

Trường hợp 1: Khi $x > 0$ thì $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$.

Do đó: $F'(x) = x\ln x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x\ln x = f(x)$.

Trường hợp 2: Khi $x = 0$.

Dùng định nghĩa tính đạo hàm:

$$F'(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{F(0 + \Delta x) - F(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\frac{(\Delta x)^2}{2}\ln \Delta x - \frac{(\Delta x)^2}{4}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{2}\Delta x \ln \Delta x = 0 = f(0).$$

Vậy: $F'(x) = f(x)$ với $\forall x \geq 0$ nên $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

§2. Một số phương pháp tìm nguyên hàm

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN.

1. Phương pháp đổi biến số.

– Cơ sở của phương pháp đổi biến số là định lí sau đây.

Định lí 1.

Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y = f(u)$ liên tục sao cho $f[u(x)]$ xác định trên K. Khi đó nếu F là một nguyên hàm của f, tức là $\int f(u)du = F(u) + C$ thì $\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C$ (1)

Chú ý. Trong thực hành, ta thường viết tắt $F[u(x)]$ là $F(u)$, $f[u(x)]$ là $f(u)$ và coi du là vi phân của hàm số $u = u(x)$ (nghĩa là $du = du(x) = u'(x)dx$).

Khi đó, công thức (1) được viết như sau:

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = \int f[u(x)]du(x) = \int f(u)du$$

$$= F(u) + C = F[u(x)] + C \qquad (2)$$

Ta nói đã thực hiện phép đổi biến $u = u(x)$.

2. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.

Cơ sở của phương pháp lấy nguyên hàm từng phần là định lí sau đây.

Định lí 2.

Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Công thức trên gọi là công thức lấy nguyên hàm từng phần (gọi tắt là công thức nguyên hàm từng phần) và được viết gọn dưới dạng

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH.

DẠNG 1. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 1

Phương pháp.

1. Đặt: $u = \varphi(x) \Rightarrow du = \varphi'(x)dx$
2. Tính x theo u và dx theo du. Biểu thị f(x)dx theo u và du, giả sử $f(x)dx = g(u)du$
3. Tính $\int g(u)du = G(u) + C$
4. Thay u theo x vào G(u) ta được nguyên hàm phải tìm.

Ví dụ 1. Tính:

a) $I = \int \frac{x^2dx}{5 - x^6}$; b) $K = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - 1}}$.

Giải

a) Đặt: $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2dx \Rightarrow \frac{du}{3} = x^2dx$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\int \frac{du}{5 - u^2} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5} + u}{\sqrt{5} - u}\right| + C$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5} + x^3}{\sqrt{5} - x^3}\right| + C$$

b) Tính $K = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - 1}}$

Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow \frac{du}{2} = xdx$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{1}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - 1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + \sqrt{x^4 - 1}\right| + C.$$

Ví dụ 2. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^6 + 4x^4 + 4x^2 + 1}$.

Giải

Ta có: $I = \int f(x)dx = \int \frac{\frac{x^3 - x}{x^3}}{\frac{x^6 + 4x^4 + 4x^2 + 1}{x^3}}dx$

$$= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^3 + 4x + 4\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^3 + \frac{1}{x^3} + 4\left(x + \frac{1}{x}\right)}dx$$

$$= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x + \frac{1}{x}\right)} dx$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$

$$I = \int \frac{dt}{t^3 + t} = \int \frac{(t^2 + 1) - t^2}{t(t^2 + 1)} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2 + 1}\right) dt$$

$$= \int \frac{dt}{t} - \int \frac{tdt}{t^2 + 1} = \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1}$$

$$= \ln|t| - \frac{1}{2} \ln|t^2 + 1| + C = \ln|t| - \ln|t^2 + 1|^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \ln \frac{|t|}{\sqrt{t^2 + 1}} + C.$$

$$\Rightarrow I = \ln \frac{\left|x + \frac{1}{x}\right|}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 1}} + C.$$

Ví dụ 3. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \frac{x}{\sqrt[10]{x + 1}}$ (1)

(Học viện công nghệ B.C.V.T - 1999, cơ sở 2)

Giải

Ta có: $f(x) = \frac{x}{\sqrt[10]{x + 1}}$ (1)

Tính $\int \frac{x}{\sqrt[10]{x + 1}} dx$

Đặt: $t = \sqrt[10]{x + 1} \Rightarrow t^{10} = x + 1$ hay $x = t^{10} - 1$

Suy ra $dx = 10t^9 dt$

Do đó: $\int f(x)dx = \int \frac{t^{10} - 1}{t} 10t^9 dt$

$$= 10\int (t^{18} - t^8) dt = 10\left(\frac{t^{19}}{19} - \frac{t^9}{9}\right) + C \quad (2)$$

Thế $t = \sqrt[10]{x + 1}$ vào (2) ta được:

$$\int f(x)dx = 10\left(\frac{1}{19}\left(\sqrt[10]{x + 1}\right)^{19} - \frac{1}{9}\left(\sqrt[10]{x + 1}\right)^9\right) + C$$

Vậy họ nguyên hàm của hàm số f(x) là:

$$10\left(\frac{1}{19}\sqrt[10]{(x+1)^{19}}-\frac{1}{9}\sqrt[10]{(x+1)^{9}}\right)+C$$

Ví dụ 4. Tính: $\int \frac{dx}{\cos x \sin^4 x}$.

(Cao đẳng Giao thông – 1999)

Giải

Ta có: $I=\int \frac{dx}{\cos x\sin^4 x}=\int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x\sin^4 x}=\int \frac{\cos x dx}{(1-\sin^2 x)\sin^4 x}$

$$=\int \frac{d(\sin x)}{\sin^4 x(1-\sin^2 x)} \quad (1)$$

Đặt $t = \sin x$, từ (1) ta suy ra:

$$I=\int \frac{dt}{t^4(1-t^2)}=\int\left[\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}+\frac{1}{1-t^2}\right]dt=-\frac{1}{t}-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$$

Chú ý: $\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)$.

Ví dụ 5. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x)=\frac{1}{1+\sin 2x}$.

(Đại học Ngoại thương cơ sở II TP.HCM – 2000, khối B)

Giải

$$f(x)=\frac{1}{1+\sin 2x}$$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x)dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

Do đó: $\int \frac{1}{1+\sin 2x}dx=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{(t+1)^2}=\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2}=-\frac{1}{t+1}+C$

$$=-\frac{1}{1+\tan x}+C=-\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}+C.$$

Vậy họ nguyên hàm của hàm số f(x) là: $F(x)=-\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}+C$.

Ví dụ 6. Tìm họ nguyên hàm: $I=\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}$

(Học viện Ngân hàng – 1999, khối D, K)

Giải

Ta có: $I=\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}$

Biết $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

và $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sin x + \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos x$

$$= 2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right) = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó: $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \dfrac{(1+\cos 2x)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx$ (1)

Đặt $t = x + \dfrac{\pi}{3}$ thì $dt = dx$

và $\cos 2x = \cos\left(2t - \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos 2t\cos\dfrac{2\pi}{3} + \sin 2t\sin\dfrac{2\pi}{3}$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t = -\frac{1}{2}(1-2\sin^2 t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t$$

nên $1 + \cos 2x = \dfrac{1}{2} + \sin^2 t + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t$.

Khi đó (1) trở thành:

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{2} + \sin^2 t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t}{\sin t}dt$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{dt}{\sin t} + \frac{1}{4}\int \sin t dt + \frac{\sqrt{3}}{4}\int \cos t dt$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{d\left(\tan\frac{t}{2}\right)}{\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{4}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin t + C$$

$$I = \frac{1}{8}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right| - \frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + C$$

Ví dụ 7. Tính: $I = \displaystyle\int \dfrac{\ln\tan x}{\sin x\cos x}dx$

Giải

Ta có: $I = \displaystyle\int \dfrac{\ln\tan x}{\sin x\cos x}dx$

Đặt $u = \ln\tan x \Rightarrow \tan x = e^u$

$\cot x = \dfrac{1}{e^u} = e^{-u} \Rightarrow d\tan x = de^u$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = de^u \Rightarrow \quad dx = \cos^2 x de^u.$

Do đó: $I = \int \dfrac{u\cos^2 x de^u}{\sin x \cos x} = \int u \cot x de^u = \int u.\dfrac{1}{e^u}.e^u du = \int u du = \dfrac{1}{2}u^2 + C$

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{2}(\ln\tan x)^2 + C$

DẠNG 2. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2

Phương pháp.

1. Đặt: $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$.
2. Biểu thị f(x)dx theo t và dt. Giả sử $f(x)dx = g(t)dt$
3. Tính : $\int g(t)dt = G(t) + C$
4. Thay t theo x ta được nguyên hàm phải tìm.

Ví dụ 1. Tính nguyên hàm: $I = \int \dfrac{x^7 dx}{(1-x^2)^5}$.

Giải

Đặt $x = \sin t \quad \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \cos t dt,\ 1 - x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t.$

Do đó: $I = \int \dfrac{x^7 dx}{(1-x^2)^5} = \int \dfrac{\sin^7 t \cos t dt}{(\cos^2 t)^5}$

$= \int \dfrac{\sin^7 t dx}{\cos^7 t \cos^2 t} = \int \tan^7 t d t(\tan t) = \dfrac{1}{8}\tan^8 t + C$

Tính tant: $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Vậy: $I = \dfrac{1}{8}\dfrac{x^8}{(1-x^2)^4} + C$

Ví dụ 2. Tính: $I = \int \dfrac{xdx}{\sqrt{(1-x^4)^3}}$

Giải

Ta có $I = \int \dfrac{xdx}{\sqrt{(1-x^4)^3}} \qquad (1)$

Đặt $x^2 = \sin u \quad \left(u \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^4} = \sqrt{\cos^2 u} = \cos u \Rightarrow 2xdx = \cos u du$

$$(1)\quad \Rightarrow I = \int \frac{\frac{\cos u\,du}{2}}{\cos^3 u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{2}\int d(\tan u) = \frac{1}{2}\tan u + C$$

Vậy $\quad I = \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} + C$

Ví dụ 3. Tìm họ nguyên hàm: $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Giải

Đặt $x = \tan t \quad \left(t \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt = (1+\tan^2 t)dt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{\sin t}{\cos t}.\frac{1}{\cos t}} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C \qquad (1)$$

Tính $\tan\frac{t}{2}$: $\quad \tan t = \frac{2\tan\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}}$

$$x = \tan t = \frac{2\tan\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$\Rightarrow u^2x + x = 2u \Rightarrow xu^2 - 2u + x = 0$

$$u = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad (2)$$

$$u = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad \text{(loại)}$$

Thế (2) vào (1) ta được: $I = \ln\left|\tan\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)\right| + C$

Ví dụ 4. Tính $\quad I = \int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}dx$

Giải

Đặt $x = 2\tan t \Rightarrow x^2 = 4\tan^2 t$

Do đó: $4 + x^2 = 4 + 4\tan^2 t = 4(1+\tan^2 t) = 4\frac{1}{\cos^2 t} \qquad (1)$

Vi phân: $\quad dx^2 = d4\tan^2 t$

$$2xdx = 4.2\tan t\frac{1}{\cos^2 t}dt$$

$$dx = 4\tan t\frac{1}{\cos^2 t}.\frac{1}{x}dt = 4\tan t\frac{1}{\cos^2 t}.\frac{1}{2\tan t}dt = \frac{2}{\cos^2 t}dt$$

Ta có: $$I = \int\frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}dx = \int\frac{2}{\cos t}\frac{1}{\left(\dfrac{2^6\sin^6 t}{\cos^6 t}\right)}\frac{2}{\cos^2 t}dt$$

$$= \frac{1}{2^4}\int\frac{\cos^3 tdt}{\sin^6 t} = \frac{1}{16}\int\frac{\cos^2 t\cos t}{\sin^6 t}dt$$

$$= \frac{1}{16}\int\frac{(1-\sin^2 t)d(\sin t)}{\sin^6 t}$$

$$= \frac{1}{16}\int(\sin^{-6} td(\sin t) - \frac{1}{16}\int\sin^{-4} td(\sin t)$$

$$= \frac{1}{16}\frac{\sin^{-5} t}{(-5)} - \frac{1}{16}\frac{\sin^{-3} t}{(-3)} + C$$

$$= -\frac{1}{80}\frac{1}{\sin^5 t} + \frac{1}{48}\frac{1}{\sin^3 t} + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{240}\frac{1}{\sin^3 t}\left(5 - \frac{3}{\sin^2 t}\right) \qquad (2)$$

Tính sint:

Từ (1) ta có: $\cos^2 t = \dfrac{4}{4+x^2}$

$$\Rightarrow \sin t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4+x^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{4+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$

Do đó từ (2) suy ra:

$$I = \frac{1}{240}\frac{1}{\dfrac{x^3}{\sqrt{(4+x^2)^3}}}\left[5 - \frac{3}{\left(\dfrac{x^2}{4+x^2}\right)}\right] = \frac{\sqrt{(4+x^2)^3}}{240x^3}\left[5 - \frac{3(4+x^2)}{x^2}\right]$$

$$I = \frac{\sqrt{(4+x^2)^3}(x^2-6)}{120x^5}$$

Ví dụ 5. Tính: $I = \displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}dx$

Giải

Biến đổi $(x^2 - 8)$ để có thể đưa ra ngoài dấu căn

Đặt $x = \dfrac{\sqrt{8}}{\cos t} \Rightarrow \cos t = \dfrac{\sqrt{8}}{x}$ (với $\cos t \neq 0$ và $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$)

$$x^2 - 8 = \frac{8}{\cos^2 t} - 8 = \frac{8(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t} = \frac{8\sin^2 t}{\cos^2 t}$$

Vi phân: $dx = \frac{\sqrt{8}\sin t}{\cos^2 t}dt$

và $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{8}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-8}}{x}$

Ta có: $I = \int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x.x^3}dx = \int \frac{\sqrt{8}\frac{\sin t}{\cos^2 t}\sin tdt}{\frac{8\sqrt{8}}{\cos^3 t}}$

$$= \int \frac{\sin^2 t}{\frac{8}{\cos t}}dt = \frac{1}{8}\int \sin^2 t\cos tdt = \frac{1}{8}\int \sin^2 td(\sin t) = \frac{1}{8}\frac{1}{3}\sin^3 t + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{24}\frac{\sqrt{(x^2-8)^3}}{x^3} + C$$

Ví dụ 6. Tính: $I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$

Giải

Đặt $x = \frac{\sqrt{3}}{\cos t}$ $\left(t \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$ $\Rightarrow \cos t = \frac{\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}$

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-3}}{x}}{\frac{\sqrt{3}}{x}} \Rightarrow \sqrt{3}\tan t = \sqrt{x^2-3}$$

Ta có: $dx = \frac{\sqrt{3}\sin tdt}{\cos^2 t}$

Do đó: $I = \int \frac{\frac{\sqrt{3}\sin t}{\cos^3 t}}{\frac{9}{\cos^4 t}\sqrt{3}\frac{\sin t}{\cos t}} = \frac{1}{9}\int \cos^3 tdt$

$$= \frac{1}{9}\int (1-\sin^2 t)\cos tdt = \frac{1}{9}\int (1-\sin^2 t)d\sin t$$

$$= \frac{1}{9}\sin t - \frac{1}{27}\sin^3 t + C = \frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-3}}{x} - \frac{1}{27}\frac{\sqrt{(x^2-3)^3}}{x^3} + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sqrt{x^2-3}(2x^2+3)}{27x^3} + C$$

Ví dụ 7. Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$

Giải

Ta có: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$

Đặt $x = a\tan t \quad \left(t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad \Rightarrow dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$

$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 t} = \frac{a}{\cos t}$

Do đó: $I = \int \frac{\frac{adt}{\cos^2 t}}{\frac{a^3}{\cos^3 t}} = \frac{1}{a^2} \int \cos t dt$

$= \frac{1}{a^2} \int d(\sin t) = \frac{1}{a^2} \sin t + C$

Biết $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + x^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{a^2 + x^2}}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + C$

Ví dụ 8. Tính: $I = \int \frac{\sqrt{1 + x^8}}{x^{13}} dx$

Giải

Đặt $x^4 = \tan u \Rightarrow \sqrt{1 + x^8} = \sqrt{1 + \tan^2 u} = \frac{1}{\cos u} \quad \left(u \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3 \cos^2 u}$

Do đó: $I = \int \frac{\sqrt{1 + x^8}}{x^{13}} dx = \int \frac{\frac{1}{\cos u} \frac{du}{4x^3 \cos^2 u}}{x^{13}}$

$= \frac{1}{4} \int \frac{du}{(\cos^3 u).x^{16}} = \frac{1}{4} \int \frac{\cos u du}{\cos^4 u \frac{\sin^4 u}{\cos^4 u}}$

$= \frac{1}{4} \int \frac{\cos u du}{\sin^4 u} = \frac{1}{4} \int \frac{d \sin u}{\sin^4 u} = \frac{1}{4} \frac{\sin^{-3} u}{-4 + 1} + C$

$= -\frac{1}{12 \sin^3 u} + C \qquad (1)$

Tính sinu: $\sin^2 u = \cos^2 u(\tan^2 u) = \frac{x^8}{1 + x^8} \Rightarrow \sin u = \frac{x^4}{\sqrt{1 + x^8}}$

Từ (1) suy ra: $I = \frac{-\sqrt{(1+x^8)^3}}{12x^{12}} + C$

DẠNG 3. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP LẤY NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Phương pháp.

Để tính $\int f(x)dx$ bằng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Phân tích $f(x)dx = udv$

Nên chọn u sao cho du đơn giản, quen thuộc.

Nên chọn dv sao cho có thể tính được: $v = \int dv$ và $\int vdu$

Bước 2: Tính $du = u'(x)dx$; $v = \int dv$

Bước 3: Áp dụng công thức $\int udv = uv - \int vdu$

*** Cách sử dụng công thức tính nguyên hàm từng phần:**

Dạng 1. $\int p(x)e^x dx$, $\int p(x)\sin xdx$, $\int p(x)\cos xdx$

Đặt $u = p(x)$

Dạng 2. $\int p(x)\ln xdx$. Đặt $dv = p(x)dx$

Dạng 3. $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$

Dùng công thức tính nguyên hàm từng phần hai lần với $u = e^{ax}$.

Ví dụ 1. Tính nguyên hàm của các hàm số:

a) $f(x) = (x^2 + 2)e^{2x}$ (Đại học mở Hà Nội – 1997)

b) $f(x) = (2x^2 + x + 1)e^x$ (Đại học Hàng hải – 1999)

Giải

a) Tính $I = \int (x^2+2).e^{2x}dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x^2 + 2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}(x^2+2).e^{2x} - \int x.e^{2x}dx$ (1)

Lại đặt: $\begin{cases} u = x \quad \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$\Rightarrow \int x.e^{2x}dx = \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx$

$$= \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Thay vào (1): $I = \frac{1}{2}(x^2 + 2).e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 - x + \frac{5}{2}\right).e^{2x} + C \quad \text{(C là hằng số bất kỳ)}$$

b) Ta có: $J = \int (2x^2 + x + 1)e^x dx$

Biết $e^x dx = de^x$ nên $J = \int (2x^2 + x + 1)de^x$

Đặt $u = 2x^2 + x + 1 \Rightarrow du = (4x + 1)dx$

$dv = de^x \Rightarrow v = e^x$

$J = uv - \int vdu = e^x(2x^2 + x + 1) - \int e^x(4x + 1)dx$

$= e^x(2x^2 + x + 1) - \int (4x + 1)de^x$

$= e^x(2x^2 + x + 1) - (4x + 1)e^x + 4\int e^x dx$

$= e^x(2x^2 + x + 1) - (4x + 1)e^x + 4e^x + C$

$= 2e^x x^2 + e^x x + e^x - 4e^x x - e^x + 4e^x + C$

$= (2x^2 - 3x + 4)e^x + C$

Vậy: $J = (2x^2 - 3x + 4)e^x + C$

Ví dụ 2. Tính: **a)** $I = \int (x^2 - 2x + 3)\sin x dx$ **b)** $J = \int (x^2 - 3).e^x dx$

Giải

a) Đặt: $\begin{cases} u = x^2 - 2x + 3 & \Rightarrow du = (2x - 2)dx \\ dv = \sin x dx & \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow I = -(x^2 - 2x + 3)\cos x + \int (2x - 2)\cos x dx$

Tính $A = \int (2x - 2)\cos x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = 2x - 2 & \Rightarrow du = 2dx \\ dv = \cos x dx & \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$

$\Rightarrow A = (2x - 2)\sin x - 2\int \sin x dx$

$\Rightarrow A = (2x - 2).\sin x + 2\cos x + C$

$\Rightarrow I = -(x^2 - 2x + 3)\cos x + (2x - 2)\sin x + 2\cos x + C$

Vậy: $I = -(x^2 - 2x + 1)\cos x + (2x - 2)\sin x + C$

b) Tính $J = \int (x^2 - 3)e^x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x^2 - 3 & \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^x dx & \Rightarrow v = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow J = (x^2 - 3).e^x - \int 2x.e^x dx$

Lại đặt: $\begin{cases} u = 2x & \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int 2xe^x dx = 2x.e^x - 2\int e^x dx = 2xe^x - 2e^x + C$$

$$\Rightarrow J = (x^2 - 3).e^x + 2x.e^x - 2e^x + C$$

Vậy $J = (x^2 + 2x - 5).e^x + C$

Ví dụ 3. Tính: **a)** $\int x\tan^2 x dx$ **b)** $\int x\cos^2 x dx$

Giải

a) Ta có: $I = \int x\tan^2 x dx$

$$= \int x(1 + \tan^2 x - 1)dx = \int x(1 + \tan^2 x)dx - \int xdx$$

$$= \int xd\tan x - \frac{1}{2}x^2 + C \quad (1)$$

Tính $\int xd(\tan x)$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = d\tan x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$

$$\int xd\tan x = x\tan x - \int \tan xdx + C = x\tan x - \ln|\cos x| + C \quad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được: $I = x\tan x - \ln|\cos x| - \frac{1}{2}x^2 + C$

b) Ta có: $J = \int x\cos^2 x dx = \int x\frac{1 + \cos 2x}{2}dx$

$$= \frac{1}{2}\int xdx + \frac{1}{2}\int x\cos 2xdx = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}xd(\sin 2x) + C$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{4}\int \sin 2xdx + C$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$$

Ví dụ 4. Tính $I = \int x\sin\sqrt{x}dx$

(Đại học Mỏ – Địa chất – 1998, phân ban)

Giải

Cách 1.

Ta có: $I = \int x\sin\sqrt{x}dx$

Xét: $d(\cos\sqrt{x}) = -(\sqrt{x})'\sin\sqrt{x}dx = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}dx$

Suy ra: $\sin\sqrt{x}dx = -2\sqrt{x}dx(\cos\sqrt{x})$

Do đó: $I = \int x\left[-2\sqrt{x}d\left(\cos\sqrt{x}\right)\right] = \int -2(\sqrt{x})^3[d(\cos\sqrt{x})]$

Đặt: $\begin{cases} u = -2(\sqrt{x})^3 & \Rightarrow du = -3(\sqrt{x})dx \\ dv = d(\cos\sqrt{x}) & \Rightarrow v = \cos\sqrt{x} \end{cases}$

$I = uv - \int vdu = -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + \int 3(\sqrt{x})\cos\sqrt{x}dx.$

$= -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + \int 6x\cos\sqrt{x}d\sqrt{x} = -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6J$

$J = \int x\cos\sqrt{x}d\sqrt{x} = \int xd(\sin\sqrt{x})$

$= x\sin\sqrt{x} - \int \sin\sqrt{x}dx$

Ta có: $d\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$ nên $dx = 2\sqrt{x}d\sqrt{x}$

Do đó: $J = x\sin\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}d\sqrt{x} = x\sin\sqrt{x} + \int 2\sqrt{x}d(\cos\sqrt{x})$

$= x\sin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 2\int \cos\sqrt{x}d\sqrt{x}$

$= x\sin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 2\sin\sqrt{x} + C \quad (2)$

Thay J ở (2) vào (1) ta có:

$I = -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6x\sin\sqrt{x} + 12\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 12\sin\sqrt{x} + C$

Cách 2:

Đặt: $t = \sqrt{x}$ thì $x = t^2$; $dx = 2tdt$

Do đó: $I = \int x\sin\sqrt{x}dx = \int t^2\sin t(2tdt) = \int 2t^3\sin tdt$

Đặt $\begin{cases} u = t^3 & \Rightarrow du = 3t^2dt \\ dv = \sin tdt & \Rightarrow v = -\cos t \end{cases}$

$I = 2\int t^3\sin tdt = 2(-t^3\cos t + \int 3t^2\cos tdt)$

$= -2t^3\cos t + 6\int t^2d(\sin t) = -2\left(\sqrt{x}\right)^3\cos\sqrt{x} + 6J \quad (3)$

Tính J: $J = \int t^2d\sin t$

Đặt $\begin{cases} u = t^2 & \Rightarrow du = 2tdt \\ dv = d\sin t & \Rightarrow v = \sin t \end{cases}$

Ta có: $J = t^2d\sin t - \int 2t\sin tdt = x\sin\sqrt{x} + 2\int td(\cos t)$

$= x\sin\sqrt{x} + 2(t\cos t - \int \cos tdt)$

$= x\sin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 2\int d(\sin t)$

$J = x\sin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 2\sin\sqrt{x} \quad (4)$

Thế J ở (4) vào (3), ta có:

$I = -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6x\sin\sqrt{x} + 12\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 12\sin\sqrt{x} + C$

Ví dụ 5. Tính: **a)** $I = \int \sin x \ln(\tan x)dx$ **b)** $J = \int \sin(\ln x)dx$

Giải

a) Ta có: $I = \int \sin x \ln(\tan x)dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\tan x) \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1+\tan^2 x}{\tan x}dx = \dfrac{2dx}{\sin 2x} \\ v = -\cos x \end{cases}$

Do đó: $I = uv - \int vdu = -\cos x \ln(\tan x) + \int \dfrac{dx}{\sin x}$

$$= -\cos x\ln(\tan x) + \int \frac{\cos\frac{x}{2} 2d\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} + C$$

$$= -\cos x\ln(\tan x) + \int \cot\frac{x}{2} d\left(\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

$$\Rightarrow I = -\cos x \ln(\tan x) + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

b) Ta có: $J = \int \sin(\ln x)dx$

Đặt $\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos(\ln x)\dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$

Do đó: $J = uv - \int vdu = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx + C$ (1)

Tính $\int \cos(\ln x)dx$

Đặt $\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin(\ln x)\dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow \int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx + C$ (2)

Thế (2) vào (1) ta được: $J = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - J + C$

$\Rightarrow J = \dfrac{1}{2}x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

Ví dụ 6. Tính **a)** $\int \ln x dx$; **b)** $\int x \ln x dx$

Giải

a) $\int \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

Ta có: $\int \ln x dx = \int u dv = uv - \int v du$

$= x \ln x - \int dx = x\ln x - x + C$

b) $\int x \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = xdx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$I = \int u dv = uv - \int v du = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \int \dfrac{x}{2}dx$

$I = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$

Ví dụ 7. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = e^{-2x}\cos 3x$

(Đại học Ngoại thương – 1996)

Giải

Ta có: $d(\sin 3x) = 3\cos 3x dx$

nên: $\cos 3x dx = \dfrac{1}{3}d(\sin 3x)$

Do đó: $I = \int e^{-2x}\cos 3x dx = \dfrac{1}{3}\int e^{-2x}d(\sin 3x)$

Đặt: $\begin{cases} u = e^{-2x} \\ dv = d(\sin 3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = d(e^{-2x}) \\ v = \sin 3x \end{cases}$

$I = \dfrac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x - \dfrac{1}{3}\int \sin 3x d(e^{-2x})$

$= \dfrac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x + \dfrac{2}{3}\int e^{-2x}\sin 3x dx$

$= \dfrac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x - \dfrac{2}{9}\int e^{-2x}d(\cos 3x) = \dfrac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x - \dfrac{2}{9}J \quad (1)$

Tính J:

$J = \int e^{-2x}d(\cos 3x) = e^{-2x}\cos 3x - \int \cos 3x d(e^{-2x})$

$J = e^{-2x}\cos 3x + 2I \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra:

$I = \dfrac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x - \dfrac{2}{9}e^{-2x}\cos 3x - \dfrac{4}{9}I$

$\dfrac{13}{9}I = \dfrac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x - \dfrac{2}{9}e^{-2x}\cos 3x$

$13I = 3e^{-2x}\sin 3x - 2e^{-2x}\cos 3x$

$I = \dfrac{1}{13}e^{-2x}(3\sin 3x - 2\cos 3x) + C$

Ví dụ 8. Tính:

a) $I = \int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$; b) $J = \int x.\ln(x+1)dx$.

Giải

a) Đặt $\begin{cases} u = x.e^x & \Rightarrow du = (e^x + x.e^x)dx \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2}dx & \Rightarrow v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = -\frac{xe^x}{x+1} + \int \frac{(x+1)e^x}{x+1}dx = -\frac{xe^x}{x+1} + \int e^x.dx$$

Vậy: $I = \frac{-xe^x}{x+1} + e^x + C$.

b) Tính $J = \int x.\ln(x+1)dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{1}{x+1}dx \\ dv = xdx \quad \Rightarrow v = \frac{x^2-1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \frac{x^2-1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x+1}dx$$

$$= \frac{x^2-1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int (x-1)dx$$

Vậy: $J = \frac{x^2-1}{2}.\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + C$

Ví dụ 9. Tính:

a) $I = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2})dx$; b) $J = \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$

Giải

a) Tính $I = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2})dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) & \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ dv = dx & \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Lại đặt: $u = 1 + x^2 \Rightarrow du = 2xdx$

$$\Rightarrow \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{1+x^2} + C$$

Vậy: $I = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C$

b) $J = \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln(\sin x) & \Rightarrow du = \frac{\cos x}{\sin x}dx = \cot x dx \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x}dx \Rightarrow v = -\cot x \end{cases}$

$\Rightarrow J = -\cot x.\ln(\sin x) + \int \cot^2 x dx$

$J = -\cot x.\ln(\sin x) + \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx$

Vậy $J = -\cot x.\ln(\sin x) - \cot x - x + C$

Ví dụ 10. Biết $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+3}\right) + C$.

Tìm nguyên hàm $F(x) = \int \sqrt{x^2+3}dx$.

(Đại học Y khoa Hà Nội – 1999)

Giải

Ta có: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+3}\right) + C$. Tìm $F(x) = \int \sqrt{x^2+3}dx$

Đặt $u = \sqrt{x^2+3}dx \Rightarrow du = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx; dv = dx \Rightarrow v = x$

$$\int \sqrt{x^2+3}dx = uv - \int vdu = x\sqrt{x^2+3} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}dx = x\sqrt{x^2+3} - \left(\int \frac{x^2+3-3}{\sqrt{x^2+3}}dx\right)$$

$$= x\sqrt{x^2+3} - \int \sqrt{x^2+3}dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}dx$$

$$2\int \sqrt{x^2+3}dx = x\sqrt{x^2+3} + 3\ln\left(x + \sqrt{x^2+3}\right) + C$$

$$\int \sqrt{x^2+3}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+3} + \frac{3}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+3}\right) + C$$

Họ nguyên hàm F(x) là: $F(x) = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+3} + 3\ln\left(x + \sqrt{x^2+3}\right)\right] + C$

C. TOÁN TỰ LUYỆN.

Bài 1. Tính:

a) $A = \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$; b) $\int \frac{\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}.\sin 2\sqrt{x}}dx$

Bài 2. Tính:

a) $I = \int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{(4x^2+1)}}$; b) $J = \int \frac{xdx}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}$.

Bài 3. Tính:

a) $A = \int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; b) $B = \int \sin x.\ln(\cos x)dx$.

Bài 4. Tính:

a) $\int e^x \sin xdx$; b) $\int e^x \cos xdx$;

c) $\int \sin x \ln(\cos x)dx$; d) $\int \frac{x.e^x}{(x+1)^2}dx$.

D. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 1. a) $A = \int \frac{-\cos 2x}{1 - 2\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{-\cos 2xdx}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x} = \int \frac{2\cos 2xdx}{\sin^2 2x - 2}$

Đặt: $u = \sin 2x \Rightarrow du = 2\cos 2xdx$

$$\Rightarrow A = \int \frac{du}{u^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{u - \sqrt{2}}{u + \sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sin 2x - \sqrt{2}}{\sin 2x + \sqrt{2}}\right| + C$$

b) $B = \int \frac{\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}.\sin\sqrt{x}.\cos\sqrt{x}}dx = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}} + \int \frac{dx}{2\sqrt{x}.\sin\sqrt{x}}$

Đặt: $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow B = \int \frac{du}{\cos u} + \int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\tan\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right| + \ln\left|\tan\frac{u}{2}\right| + C$$

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \ln\left|\tan\frac{\sqrt{x}}{2}\right| + C$$

Bài 2. a) Đặt $2x = \tan t$ $\left(t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 4x^2} = \sqrt{1 + \tan^2 t} = \frac{1}{\cos t}$$

Và $dx = \frac{dt}{2\cos^2 t}$

$$x^2 + 4 = \frac{\tan^2 t}{2} + 4 = \frac{\sin^2 t}{4\cos^2 t} + 4 = \frac{\sin^2 t + 16\cos^2 t}{4\cos^2 t}$$

Do đó: $I = \int \frac{\frac{dt}{2\cos^2 t}}{\frac{\sin^2 t + 16\cos^2 t}{4\cos^2 t} \cdot \frac{1}{\cos t}} = 2\int \frac{\cos tdt}{\sin^2 t + 16 - 16\sin^2 t}$

$$= 2\int \frac{d\sin t}{16 - 15\sin^2 t} = 2\int \frac{d\sin t}{15\sin^2 t - 4^2}$$

$$= -2\int \frac{d\sin t}{(\sqrt{15}\sin t)^2 - 4^2}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{15}}\int \frac{d(\sqrt{15}\sin t)}{(\sqrt{15}\sin t)^2 - 4^2} = -\frac{2}{8\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{15}\sin t - 4}{\sqrt{15}\sin t + 4}\right|$$

Tính sint: có $2x = \tan t \Rightarrow \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = 4x^2$

$$\Rightarrow \sin^2 t = 4x^2(1 - \sin^2 t) \Rightarrow \sin^2 t = \frac{4x^2}{1 + 4x^2} \Rightarrow \sin t = \frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$$

Vậy: $I = -\dfrac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{15}x - 2\sqrt{1 + 4x^2}}{\sqrt{15}x + 2\sqrt{1 + 4x^2}}\right| + C$

b) Đặt $x^2 = \sin u \quad (0 < u \le \pi)$

$1 - x^4 = 1 - \sin^2 u = \cos^2 u$

$(1 - x^4)^{\frac{3}{2}} = (\cos^2 u)^{\frac{3}{2}} = \cos^3 u$

Vi phân: $dx^2 = d(\sin u)$

$$\Leftrightarrow 2xdx = \cos u du \Leftrightarrow xdx = \frac{1}{2}\cos u du$$

Ta có: $J = \displaystyle\int \frac{xdx}{(1 + x^4)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\frac{1}{2}\cos u du}{\cos^3 u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{2}\int d(\tan u)$

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{2}\tan u + C \quad (1)$

Tính: $x^2 = \sin u \Rightarrow x^4 = \sin^2 u \Rightarrow 1 - x^4 = \cos^2 u$

$\Rightarrow \tan^2 u = \dfrac{x^4}{1 - x^4} \Rightarrow \tan u = \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

Do đó từ (1) ta suy ra:

$$I = \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{1 - x^4}} + C$$

Bài 3. a) Đặt $\begin{cases} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \Rightarrow v = \tan x \end{cases}$

$$\Rightarrow A = x\tan x - \int \tan x dx = x.\tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$= x.\tan x + \int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

Vậy $A = x\tan x + \ln|\cos x| + C$

b) Tính $B = \int \sin x.\ln(\cos x)dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln(\cos x) & \Rightarrow du = -\dfrac{\sin x}{\cos x}dx \\ dv = \sin x dx & \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow B = -\cos x.\ln(\cos x) - \int \sin x dx$

Vậy $B = -\cos x \ln(\cos x) + \cos x + C$

Bài 4. a) $\int e^x \sin x dx$

Đặt $\begin{cases} u = e^x & \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$I = uv - \int v du = -e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \cos x dx}_{J}$

$J = \int e^x \cos x dx$

Đặt $\begin{cases} u = e^x & \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$

$J = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$

$J = e^x \sin x - I$

Ta có: $I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$

Vậy $I = \dfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

b) Tương tự ta có:

$I = e^x \sin x - J$

$J = -e^x \cos x + I$

$\Rightarrow I = e^x \sin x + e^x \cos x - I$

Vậy $I = \dfrac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$

c) $\int \sin x \ln(\cos x)dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln(\cos x) \Rightarrow du = -\dfrac{\sin x}{\cos x}dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$I = -\cos x \ln(\cos x) - \int \sin x dx$

$I = -\cos x \ln(\cos x) + \cos x + C$

d) $\int \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

Đặt $\begin{cases} u = x.e^x & \Rightarrow du = (e^x + xe^x)dx \\ dv = \dfrac{1}{(x+1)^2}dx \Rightarrow v = -\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$

$$= \frac{-xe^x}{x+1} + \int e^x dx$$

$$= \frac{-xe^x}{x+1} + e^x + C$$

§3. (nâng cao) Tìm nguyên hàm bằng cách liên kết

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN.

Giả sử cần lấy nguyên hàm của hàm số f(x) mà gặp khó khăn. Nếu tìm được một hàm số g(x) sao cho có thể lấy nguyên hàm của các hàm số:

* f(x) + g(x)   * f(x) – g(x)

thì ta sẽ lấy hai nguyên hàm này và bằng cách giải hệ phương trình sẽ suy ra nguyên hàm của f(x).

B. CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH

DẠNG 1. LIÊN KẾT CÁC HÀM LƯỢNG GIÁC

Phương pháp.

- Chọn hàm liên kết thích hợp.
- Tìm nguyên hàm của tổng và hiệu các hàm liên kết.
- Giải hệ phương trình để xác định nguyên hàm cần tìm.

Ví dụ 1. Cho $I = \int \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}$ và $J = \int \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$

Tính I + J và I – J. Suy ra giá trị của I và J ?

Giải

$$I + J = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int 1.dx = x + C_1$$

$$I - J = \int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{-(\cos x + \sin x)'}{\cos x + \sin x} dx = -\ln|\cos x + \sin x| + C_2$$

$$\Rightarrow 2I = x - \ln|\cos x + \sin x| + C_1 + C_2$$

$$2J = x + \ln|\cos x + \sin x| + C_1 - C_2$$

Vậy: $I = \frac{1}{2}\left[x - \ln|\cos x + \sin x|\right] + C$

$J = \frac{1}{2}\left[x + \ln|\cos x + \sin x|\right] + C$

Ví dụ 2. Tính

$I = \int \cos^2 x \cos 2x dx$; $J = \int \sin^2 x \cos 2x dx$

Giải

Ta có:

$$I + J = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1 \qquad (1)$$

$$I - J = \int (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos 2x dx = \int \cos^2 2x dx$$

$$I - J = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C_2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} I + J = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1 & (1) \\ I - J = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C_2 & (2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} I = \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C \\ J = -\frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C \end{cases}$$

Ví dụ 3. Tính $I = \int \frac{\cos^2 x}{\cos 2x}dx$

Giải

Đặt $J = \int \frac{\sin^2 x}{\cos 2x}dx$

Ta có: $I + J = \int \left(\frac{\cos^2 x}{\cos 2x} + \frac{\sin^2 x}{\cos 2x}\right)dx = \int \frac{1}{\cos 2x}dx$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C_1$$

$$I - J = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos 2x}dx = \int \frac{\cos 2x}{\cos 2x}dx = \int 1dx = x + C_2$$

Suy ra: $2I = x + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C_1 + C_2$

Vậy: $I = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

DẠNG 2. LIÊN KẾT HÀM MŨ VÀ LÔGARÍT

Phương pháp.

Sử dụng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần kết hợp với phương pháp liên kết.

Ví dụ 1. Tính: $I = \int e^{ax}.\cos bx dx$ và $J = \int e^{ax}.\sin bx dx$

Giải

* Tính I:

Đặt: $\begin{cases} u = e^{ax} & \Rightarrow u' = a.e^{x} \\ v' = \cos bx \Rightarrow v = \dfrac{1}{b}\sin bx \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{b}e^{ax}.\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}.\sin bx - \frac{a}{b}.J \qquad (1)$$

* Tính J:

Đặt: $\begin{cases} u = e^{ax} & \Rightarrow u' = a.e^{ax} \\ v' = \sin bx \Rightarrow v = -\dfrac{1}{b}\cos bx \end{cases}$

$$\Rightarrow J = -\frac{1}{b}e^{ax}.\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}.\cos bx + \frac{a}{b}.I \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1): $I = \frac{1}{b}e^{ax}.\sin bx - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}I\right)$

Vậy: $I = \dfrac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2 + b^2} + C$

Tương tự thay (1) vào (2) ta được:

$$J = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2} + C$$

Ví dụ 2. Cho $I = \int \dfrac{e^{x}dx}{e^{x} + e^{-x}}$ và $J = \int \dfrac{e^{-x}dx}{e^{x} + e^{-x}}$

Tính I + J và I – J. Suy ra giá trị của I và J.

Giải

Ta có: $I + J = \int\left(\dfrac{e^{x}}{e^{x} + e^{-x}} + \dfrac{e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}\right)dx = \int 1.dx = x + C_1$

$$I - J = \int\left(\frac{e^{x}}{e^{x} + e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}\right)dx$$

$$= \int\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}dx = \int\frac{(e^{x} + e^{-x})'}{e^{x} + e^{-x}}dx$$

$$= \ln(e^{x} + e^{-x}) + C_2$$

$\Rightarrow$ $2I = x + \ln(e^{x} + e^{-x}) + C_1 + C_2$

$2J = x - \ln(e^{x} + e^{-x}) + C_1 - C_2$

Vậy: $I = \dfrac{1}{2}\left[x + \ln(e^{x} + e^{-x})\right] + C$

$$J = \frac{1}{2}\left[x - \ln(e^x + e^{-x})\right] + C'$$

Ví dụ 3. Tính:

$$I = \int \cos(\ln x)dx \quad ; \qquad J = \int \sin(\ln x)dx$$

(ĐH Tổng hợp TP.HCM, khối A/1976 – 1977)

Giải

Để tính $I = \int \cos(\ln x)dx$ ta dùng phương pháp tích phân từng phần bằng cách đặt

$$\begin{cases} u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx \\ dv = dx \qquad\quad \Rightarrow v = x \end{cases}$$

Ta có: $I = \int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + J$ (1)

Tương tự, bằng cách đặt: $u = \sin(\ln x)$; $dv = dx$

ta lại tính được: $J = x\sin(\ln x) - I$ (2)

Từ (1) và (2):

$$\begin{cases} I = x\cos(\ln x) + J & (1) \\ J = x\sin(\ln x) - I & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \dfrac{1}{2}x\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right] + C_1 \\ J = \dfrac{1}{2}x\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C_2 \end{cases}$$

C. TOÁN TỰ LUYỆN.

Bài 1. Tìm nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \dfrac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

Bài 2. Tính $I = \int (a\cos^2 wt + b\sin^2 wt)dt$ (*)

D. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 1. Với $g(x) = \dfrac{\sin^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

ta có: $f(x) + g(x) = 1$

và $$f(x) - g(x) = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \frac{\cos 2x}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}$$

$$= \frac{2\cos 2x}{2 - \sin^2 2x} = \frac{(\sin 2x)'}{2 - \sin^2 2x}$$

Vậy $$\begin{cases} F(x) + G(x) = x + C_1 \\ F(x) - G(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x}\right| + C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x}\right| + C$$

Bà 2. Đặt $J = \int (b\cos^2 wt + a\sin^2 wt)dt$. Ta có:

$$I + J = \int (a+b)dt = (a+b)t + C_1 \qquad (1)$$

và $I - J = \int (a-b)\cos 2wtdt = \frac{a-b}{2w}\sin 2wt + C_2 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow I = \frac{a-b}{4w}\sin 2wt + \frac{a+b}{2}t + C$

Chú ý: Ta có thể tính trực tiếp I bằng cách biến đổi:

$\cos^2 wt = \frac{1+\cos 2wt}{2}$ và $\sin^2 wt = \frac{1-\cos 2wt}{2}$ rồi thay vào (*) vẫn đạtđược kết quả.

TOÁN TỰ LUẬN ÔN TẬP CHƯƠNG I

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

* Khái niệm nguyên hàm.
* Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp.
* Các tính chất của nguyên hàm.
* Phương pháp đổi biến số.
* Phương pháp tìm nguyên hàm từng phần.
* Tìm nguyên hàm bằng cách liên kết.

B. BÀI TẬP.

Bà 1. Tính các nguyên hàm sau đây:

a) $\int \frac{3x^2+1}{x^3-2x^2+6}dx$; b) $\int \frac{7x+10}{x(x-2)(x-5)}dx$

Giải

a) Ta có:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{3x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

$$= \frac{A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

So sánh hai vế, ta có:

$$A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2) = 3x^2 + 1$$

Cho $x = 1$ ta được $-6A = 4 \Rightarrow A = -\frac{2}{3}$

Cho $x = -2$ ta được $15B = 13 \Rightarrow B = \frac{13}{15}$

Cho x = 3 ta được $10C = 28 \Rightarrow C = \frac{14}{5}$

Vậy $I = \int \left(\frac{-\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{13}{15}}{x+2} + \frac{\frac{14}{5}}{x-3} \right) dx$

$$I = -\frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{13}{15}\ln|x+2| + \frac{14}{5}\ln|x-3| + C$$

b) $\int \frac{7x+10}{x(x-2)(x-5)} dx$

ta có: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{7x+10}{x(x-2)(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-5}$

$$= \frac{A(x-2)(x-5) + Bx(x-5) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x-5)}$$

So sánh hai vế ta có:

$$A(x-2)(x-5) + Bx(x-5) + Cx(x-2) = 7x + 10$$

Cho x = 0 ta có A = 1

x = 2 ta có B = −4

x = 5 ta có C = 3

Vậy $I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x-2} + \frac{3}{x-5} \right) dx$

$$I = \ln|x| - 4\ln|x-2| + 3\ln|x-5| + C$$

Bài 2. Tính $\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx$

Giải

Trước hết cần phân tích $\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ thành những phân thức đơn giản.

Chú ý rằng trong trường hợp này có thừa số $(x^2 + 1)^2$. Ta phân tích bằng cách đặt: $\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}$

Quy đồng mẫu số:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 13 &= A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x^2 + 1)(x - 2) + (Dx + E)(x - 2) \\ &= (A + B)x^4 + (C - 2B)x^3 + (2A + B - 2C + D)x^2 + \\ &\quad + (C - 2B - 2D + E)x + (A - 2C - 2E) \end{aligned}$$

Đồng nhất các hệ số ta có: $\begin{cases} A + B = 0 \\ C - 2B = 0 \\ 2A + B - 2C + D = 2 \\ -2B + C + E - 2D = 2 \\ A - 2C - 2E = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -2 \\ D = -3 \\ E = -4 \end{cases}$

Vậy $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x+2}{x^2+1}-\dfrac{3x+4}{(x^2+1)^2}$

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{x+2}{x^2+1}dx-\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx$$

Bài 3. Cho hàm số $y=\dfrac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}$

a) Xác định A, B, C để cho $y=\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$

b) Tìm các nguyên hàm của y.

(Đại học Y dược TP.Hồ Chí Minh – 1996)

Giải

a) Ta có: $y=\dfrac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}=\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{(x-1)}+\dfrac{C}{(x+2)}$

$$=\frac{A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$=\frac{(B+C)x^2+(A+B-2C)(x+2)+C(x-1)^2}{x^2-3x+2}$$

Do đó, suy ra: $\begin{cases}B+C=3\\A+B-2C=3\\2A-2B+C=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=3\\B=2\\C=1\end{cases}$

Vậy $\dfrac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}=\dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x-1)}+\dfrac{1}{(x+2)}$

b) Tìm các nguyên hàm của hàm số y

Ta có: $\displaystyle\int\left[\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)}+\frac{1}{(x+2)}\right]dx$

$$=3\int(x-1)^{-2}d(x-1)+2\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\int\frac{d(x+2)}{x+2}$$

$$=\frac{3(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+2\ln|x-1|+\ln|x+2|+C$$

$$=\frac{-3}{x-1}+2\ln|x-1|+\ln|x+2|+C=\frac{-3}{x-1}+2\ln\frac{(x-1)^2}{|x+2|}+C$$

Nguyên hàm của hàm số y là: $\dfrac{-3}{x-1}+2\ln\dfrac{(x-1)^2}{|x+2|}+C$

Bài 4. Tính các nguyên hàm sau:

a) $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$; **b)** $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+2}}$

c) $\int \frac{3x^2 - x}{\sqrt{x^2+2}}dx$; d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Giải

a) $I = \int \frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$

Đặt $u = \sqrt[3]{x^4+1} \Rightarrow u^3 = x^4 + 1$

$$\Rightarrow 3u^2du = 4x^3dx \Rightarrow x^3dx = \frac{3}{4}u^2du$$

$$I = \frac{3}{4}\int \frac{u^2du}{1+u} = \frac{3}{4}\int \frac{u^2 - 1 + 1}{u+1}du$$

$$I = \frac{3}{4}\int \left(u - 1 + \frac{1}{u+1}\right)du$$

$$I = \frac{3}{4}\left[\frac{u^2}{2} - u + \ln|u+1|\right] + C$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{\sqrt[3]{(x^4+1)^2}}{2} - \sqrt[3]{x^4+1} + \ln\left|\sqrt[3]{x^4+1}+1\right|\right] + C$$

b) $I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+2}}$

Đặt $x + 1 = \begin{cases} x+1 = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{x+1} \\ x = \frac{1}{t} - 1 \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt \end{cases}$

$$I = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + 3\left(\frac{1}{t}-1\right) + 2}}$$

$$I = \int \frac{-dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 1 + \frac{3}{t} - 3 + 2}}$$

$$I = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{t+1}{t^2}}}$$

Trường hợp 1. $t > 0 \Rightarrow x > -1$

Ta có $I = -\int \frac{dt}{\sqrt{t+1}} = -2\sqrt{t+1} + C$

$$I = -2\sqrt{\frac{1}{x+1} + 1} + C \Rightarrow I = -2\sqrt{\frac{x+2}{x+1}} + C$$

Trường hợp 2. $t < 0 \Rightarrow x < -1$

Ta có: $I = 2\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}} + C$

c) $I = \displaystyle\int \frac{3x^2 - x}{\sqrt{x^2+2}}dx$

$$I = \int \frac{3(x^2+2) - x - 6}{\sqrt{x^2+2}}dx$$

$$I = 3\int \sqrt{x^2+2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+2}} - 6\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$I = 3\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2+2} + \ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right|\right) - \sqrt{x^2+2} - 6\ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| + C$$

Vậy $I = \dfrac{3x-2}{2}\sqrt{x^2+2} - 3\ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| + C$

d) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$

$$I = 3\int \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}}$$

$$I = 3\sqrt{x^2+x+2} - \frac{1}{2}\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+2}\right| + C$$

Bài 5. a) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^3 x\sin 8x$

(Trung tâm Đào tạo và Bồi dưỡng cán bộ y tế TPHCM – 1993)

b) Tìm nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)(2 + \sin 2x)$

(Đại học Quốc gia Hà Nội – khối A – 1996)

Giải

a) Ta biết $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow \cos^3 x = \dfrac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

Do đó $f(x) = \dfrac{1}{4}[3\sin 8x\cos x + \sin 8x\cos 3x]$

Áp dụng công thức: $\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

Ta có: $f(x) = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{3}{2}(\sin 9x + \sin 7x) + \dfrac{1}{2}(\sin 11x + \sin 5x)\right]$

$$= \frac{3}{8}(\sin 9x + \sin 7x) + \frac{1}{8}(\sin 11x + \sin 5x)$$

Vậy nguyên hàm cần tìm:

$$\int f(x)dx = -\frac{3}{8}\left(\frac{\cos 9x}{9} + \frac{\cos 7x}{7}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\cos 11x}{11} + \frac{\cos 5x}{5}\right) + C$$

b) Ta có thể viết:

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)(2 + \sin 2x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x$$

Áp dụng công thức: $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

Ta có: $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x = \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

Do đó: $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

Vậy nguyên hàm cần tìm:

$$\int f(x)dx = 2\int \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx + \frac{1}{2}\int \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx - \frac{1}{2}\int \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$= -2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{6}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + C$$

Bài 6. a) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\sin 3x.\sin 4x}{\tan x + \cot 2x}$

(Đại học Ngoại thương Hà Nội – 1997)

b) Tính $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$

(Đại học Tài chính Hà Nội – 1996)

Giải

a) Ta biết: $\tan x + \cot 2x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}$

$$= \frac{\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x}{\cos x \sin 2x} = \frac{\cos(2x - x)}{\cos x \sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

Do đó: $f(x) = \sin 2x \sin 3x \sin 4x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 5x)\sin 4x$

$$= \frac{1}{2}\sin 4x \cos x - \frac{1}{2}\cos 5x \sin 4x$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 5x + \sin 3x) - \frac{1}{4}(\sin 9x - \sin x)$$

$$= \frac{1}{4}(\sin x + \sin 3x + \sin 5x - \sin 9x)$$

Vậy họ nguyên hàm F(x) của f(x) là:

$$F(x) = \frac{1}{4}\left(-\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{9}\cos x\right) + C$$

hay $F(x) = -\frac{1}{4}\left(\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{9}\cos 9x\right) + C$

b) Ta có thể viết:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}} = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\tan^3 x\cos^8 x}}$$

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt[4]{\tan^3 x}} = \int \frac{dx}{(\tan x)^{\frac{3}{4}}\cos^2 x}$$

$$I = \int (\tan x)^{-\frac{3}{4}} d(\tan x) = \frac{(\tan x)^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} = 4\sqrt[4]{\tan x} + C$$

Bài 7. a) Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \frac{\cos x + \sin x\cos x}{2 + \sin x}$

(Đại học Ngoại thương TPHCM – 1997)

b) Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \cos^3 x.\cos 3x$

(Đại học Ngoại thương khối D – 1998)

Giải

a) Ta có thể viết:

$$f(x) = \frac{\cos x + \sin x\cos x}{2 + \sin x} = \frac{2\cos x + \sin x\cos x - \cos x}{2 + \sin x}$$

$$= \frac{\cos x(2 + \sin x) - \cos x}{2 + \sin x}$$

$$= \cos x - \frac{\cos x}{2 + \sin x} \qquad (\text{Do } 2 + \sin x \neq 0)$$

Do đó: $\int f(x)dx = \int \cos x dx - \int \frac{\cos x}{2 + \sin x}dx$

$$= \sin x - \int \frac{d(\sin x + 2)}{\sin x + 2} = \sin x - \ln|\sin x + 2|$$

Vậy họ nguyên hàm cần tìm: $F(x) = \sin x - \ln|\sin x + 2| + C$

b) Ta biết công thức: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$$\Rightarrow \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$$

Do đó: $f(x) = \cos^3 x\cos 3x = \frac{1}{4}(3\cos x\cos 3x + \cos^2 3x)$

$$f(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}(\cos 4x + \cos 2x) + \frac{1 + \cos 6x}{2}\right]$$

$$f(x) = \frac{1}{8}[3\cos 4x + 3\cos 2x + \cos 6x + 1]$$

Áp dụng công thức:

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

Ta có họ nguyên hàm tìm:

$$F(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\sin 4x + \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{1}{6}\sin 6x + x\right) + C$$

Bài 8. a) Gọi $F(x) = \int \frac{1}{x^3 + x^5}dx$. Bằng phương pháp thêm bớt vào tử số hãy tính nguyên hàm của F(x) trên.

(Đại học Y Hà Nội – 1997)

b) Tìm nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = 2\sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}$ sao cho đồ thị của hàm số f(x) và F(x) cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

(Đại học Quốc gia Hà Nội – khối B – 1996)

Giải

a) Ta có thể viết:

$$F(x) = \int \frac{1}{x^3 + x^5}dx = \int \frac{1 - x^4 + x^4}{x^3(1+x^2)}dx$$

$$= \int \frac{(1-x^2)(1+x^2) + x^4}{x^3(1+x^2)}dx = \int\left(\frac{1-x^2}{x^3} + \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \int\left(x^{-3} - \frac{1}{x} + \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \int\left(x^{-3} - \frac{1}{x}\right)dx + \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^{-2}}{-2} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$= \ln\sqrt{1+x^2} - \ln|x| - \frac{1}{2x^2} = \ln\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} - \frac{1}{2x^2} + C$$

b) Ta có $f(x) = 2\sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5} = 2\sin 5x + x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{5}$

Do đó nguyên hàm

$$F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{5}x + C$$

$$F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{3}{5}x + C$$

Đồ thị của hàm số f(x) và F(x) cắt nhau tại 1 điểm trên trục tung nên

$x = 0 \Rightarrow F(0) = f(0) \Rightarrow -\frac{2}{5} + C = \frac{3}{5} \Rightarrow C = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$

Vậy nguyên hàm cần tìm: $F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{3}{5}x + 1$

Bài 9. Tính

a) $I = \int x\sin xdx$; b) $K = \int x^2\sin 3xdx$.

Giải

a) Đặt $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$$I = \int udv = uv - \int vdu = -x\cos x + \int \cos xdx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

b) Đặt $\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = \sin 3xdx \Rightarrow v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{cases}$

$$K = \int x^2\sin 3xdx = \int udv = uv - \int vdu$$

$$= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}\int x\cos 3xdx \qquad (*)$$

Lại đặt: $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos 3xdx \Rightarrow v = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{cases}$

$$\int x\cos 3xdx = \int udv = uv - \int vdu$$

$$= \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3xdx = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C_1$$

Thay vào (*) ta được:

$$K = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C_1\right)$$

$$K = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + C$$

$$= \frac{2 - 9x^2}{27}\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x + C$$

Bài 10. Tính

a) $\int e^x\sin xdx$; b) $\int e^{2x}\cos 3xdx$

Giải

a) Đặt $\begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^xdx \\ dv = \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$$\int e^x\sin xdx = -e^x\cos x + \int e^x\cos xdx \qquad (*)$$

Lại tích phân từng phần một lần nữa để tính $\int e^x\cos xdx$ rồi thay vào (*) ta được:

Kết quả: $\int e^x\sin xdx = \dfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

b) Đặt: $\begin{cases} u = \cos 3x \Rightarrow du = -3\sin 3xdx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\cos 3xdx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3xdx \qquad (*)$$

Lại tích phân từng phần lần nữa để tính $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ bằng cách đặt:

$\begin{cases} u = \sin 3x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases}$ rồi thay vào (*) ta được:

$$\int e^{2x}\cos 3xdx = \frac{e^{2x}}{13}(2\cos 3x + 3\sin 3x) + C$$

C. TOÁN TỰ LUYỆN.

Bài 1. Tìm nguyên hàm của hàm số: $y = \dfrac{3x+1}{(x+1)^3}$

(Đại học Ngân hàng TPHCM – 1991)

Bài 2. Tính $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x-1}}$

(Cao đẳng Sư phạm Kỹ thuật – 1998)

Bài 3. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \dfrac{\ln(ex)}{1 + x\ln x}$

(Học viện Quan hệ Quốc tế – khối A – 1997)

Bài 4. Tìm họ nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \sin^3 x\cos 3x + \cos^3 x\sin 3x$$

(Học viện Quan hệ Quốc tế – 1998)

D. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 1. Ta có thể viết:

$$y = \frac{3x+1}{(x+1)^3} = 3\frac{x + \frac{1}{3}}{(x+1)^3} = 3\frac{x + 1 - \frac{2}{3}}{(x+1)^3} = \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}$$

Áp dụng công thức: $\displaystyle\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + C$

Vậy nguyên hàm cần tìm: $\displaystyle\int ydx = 3\int \frac{dx}{(x+1)^2} - 2\int \frac{dx}{(x+1)^3}$

$$= 3\int (x+1)^{-2}dx - 2\int (x+1)^{-3}dx$$

$$= 3\frac{(x+1)^{-1}}{-1} - 2\frac{(x+1)^{-2}}{-2} = -\frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + C$$

Bài 2. Tính $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x-1}} = \int \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1}}{(x-2) - (x-1)}dx$

$$= -\int\left[\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}\right]dx$$

Do đó: $I = -\int\left[(x-2)^{\frac{1}{2}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]dx = -\left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]+C$

$$= -\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x-2)^3}+\sqrt{(x-1)^3}\right]+C$$

Bài 3. Hàm số đã cho có thể viết: $f(x) = \dfrac{\ln(ex)}{1+x\ln x} = \dfrac{\ln e+\ln x}{1+x\ln x} = \dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

Ngoài ra ta biết:

$y = 1 + x\ln x \Rightarrow y' = 0 + 1\ln x + x.\dfrac{1}{x} = 1 + \ln x$

$\Rightarrow dy = (1+\ln x)dx$

hay $d(1 + x\ln x) = (1 + \ln x)dx$

Do đó: $\displaystyle\int f(x)dx = \int\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}dx = \int\frac{d(1+x\ln x)}{1+x\ln x} = \ln\left|1+x\ln x\right| + C$

Vậy họ nguyên hàm cần tìm: $F(x) = \ln|1 + x\ln x| + C$

Bài 4. Công thức lượng giác:

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

Do đó biến đổi:

$f(x) = \sin^3 x\cos 3x + \cos^3 x\sin 3x$

$= \sin^3 x(4\cos^3 x - 3\cos x) + \cos^3 x(3\sin x - 4\sin^3 x)$

$= 4\sin^3 x\cos^3 x - 3\cos x\sin^3 x + 3\sin x\cos^3 x - 4\cos^3 x\sin^3 x$

$= 3\sin x\cos^3 x - 3\cos x\sin^3 x = 3\sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= \dfrac{3}{2}\sin 2x.\cos 2x = \dfrac{3}{4}\sin 4x$

Vậy họ nguyên hàm cần tìm: $F(x) = \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{4}\cos 4x\right) = -\dfrac{3}{16}\cos 4x + C$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CHƯƠNG I

A. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

1. Tính đạo hàm của xsinx rồi suy ra nguyên hàm của xcosx là:

A) $x\sin x + C$; **(B)** $x\cos x + C$;

C) $\dfrac{x^2}{2}\cos x + C$; **(D)** $x\sin x + \cos x + C$.

2. Tìm một nguyên hàm của $1 + 4.\dfrac{\tan^2\frac{x}{2}}{\left(\tan^2\frac{x}{2}-1\right)^2}$ biết nguyên hàm này bằng

3 khi $x = \dfrac{\pi}{4}$. Nguyên hàm là:

(A) $\frac{1}{\cos^2 x}+3$; (B) $\frac{1}{\sin^2 x}+3$; (C) $\tan x + 2$; (D) $\cot x + 2$.

3. Hàm số $y = \ln|\sin x - 3\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây ?

(A) $y = \cos x + 3\sin x$; (B) $y = \frac{\sin x - 3\cos x}{\cos x + 3\sin x}$;

(C) $y = \frac{-\cos x - 3\sin x}{\sin x - 3\cos x}$; (D) $y = \frac{\cos x + 3\sin x}{\sin x - 3\cos x}$.

4. Tìm nguyên hàm F(x) của $f(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$ biết F(3) = 1. F(x) bằng:

(A) $F(x) = \frac{5}{x+2}$; (B) $F(x) = \frac{-x+8}{x+2}$;

(C) $F(x) = \frac{2x-1}{x+2}$; (D) $F(x) = \frac{3x-4}{x+2}$.

5. $F(x) = x + \ln|2\sin x - \cos x|$ là một nguyên hàm của:

(A) $\frac{\sin x - \cos x}{3\cos x + \sin x}$; (B) $\frac{2\cos x + \sin x}{2\sin x - \cos x}$;

(C) $\frac{\sin x - \cos x}{3\cos x + \sin x}$; (D) $\frac{3\sin x + \cos x}{2\sin x - \cos x}$.

6. $F(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{1-x}$ là một nguyên hàm của:

(A) $\frac{2x-1}{(1-x)^2}$; (B) $\frac{x^2+x+2}{(1-x)^2}$;

(C) $\frac{-2x^2+4x}{(x-1)^2}$; (D) $\frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2}$.

7. Nguyên hàm của $2x(1 + 3x^3)$ là:

(A) $x^2(x + x^3) + C$; (B) $x^2(1 + 3x^2) + C$;

(C) $2x(x + x^3) + C$; (D) $x^2\left(1+\frac{6x^3}{5}\right)+C$.

8. Nguyên hàm của $\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$ là:

(A) $-\frac{x^4+x^2+3}{3x}+C$; (B) $-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}-\frac{x}{3}+C$;

(C) $\frac{x-3x-x^4}{3x}$; (D) $-\frac{1}{x}-\frac{x^3}{3}+C$.

9. Tìm A và B sao cho $\frac{2-x}{x^2+2x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}$:

(A) A = 2 và B = −1 ; (B) A = 2 và B = 1 ;

(C) A = 1 và B = 2 ; (D) A = 1 và B = −2.

10. Đặt $A = \int \sin^2 x dx$ và $B = \int \cos^2 x dx$. Giá trị A − B bằng:

(A) $A - B = \frac{1}{2}\sin 2x + C$; (B) $A - B = \frac{1}{2}\cos 2x + C$;

(C) $A - B = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$; (D) $A - B = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$.

11. $\int \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x^2}dx$ bằng:

(A) $\frac{2(x-1)}{\sqrt{x}} + C$; (B) $\frac{2(\sqrt{x}+1)}{x^2} + C$;

(C) $\frac{2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + C$; (D) $\frac{1+2\sqrt{x}}{x} + C$.

12. $\int (9x^2 - 6x + 1)^2 dx$ bằng:

(A) $\frac{(3x^3 - 3x^2 + x)^5}{5} + C$; (B) $\left(\frac{3x^3 - 3x^2 + x}{5}\right)^5 + C$;

(C) $\frac{1}{5}(3x-1)^5 + C$; (D) $\frac{1}{15}(3x-1)^5 + C$.

13. $F(x) = \int \left[\left(\frac{1 - \tan x.\tan 2x}{\tan 2x + \tan x}\right)^2 + 1\right]dx$ bằng:

(A) $F(x) = \frac{1}{3}\cot 3x + C$; (B) $F(x) = -\frac{1}{3}\cot 3x + C$;

(C) $F(x) = \frac{1}{2}\tan 2x + C$; (D) $F(x) = -\frac{1}{2}\tan 2x + C$.

14. $F(x) = \int \left(3\cos\frac{x}{3} - 4\cos^3\frac{x}{3}\right)dx$ bằng:

(A) $F(x) = \sin\frac{x}{3} - \sin^4\frac{x}{3} + C$; (B) $F(x) = 6\sin\frac{x}{3} - \frac{4}{3}\sin^4 x + C$;

(C) $F(x) = -\cos x + C$; (D) $F(x) = -\sin x + C$.

15. $\int (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x^2 - 2x + 1)^2 dx$ bằng:

(A) $\left(\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - x\right)\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right) + C$; (B) $\frac{(x-1)^8}{8} + C$;

(C) $\left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 3x\right)\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right) + C$; (D) $-\frac{(x-1)^5}{5} + C$.

16. $\int \frac{1}{2-3x}dx$ bằng:

(A) $\frac{1}{(2-3x)^2} + C$; (B) $-\frac{3}{(2-3x)^2} + C$;

(C) $\frac{1}{3}\ln|2-3x| + C$; (D) $-\frac{1}{3}\ln|3x-2| + C$.

17. Tính đạo hàm của x(lnx – 1), từ đó suy ra nguyên hàm F(x) của $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ bằng:

(A) $F(x) = (x + 1)\ln x - x + C$; **(B)** $F(x) = \ln x - \frac{1}{x^2} + C$;

(C) $F(x) = x + (x + 1)\ln x + C$; **(D)** $F(x) = \ln x + \frac{1}{x^2} + C$.

18. Biết $\sin^6x + \cos^6x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$ và $\sin^2x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

$F(x) = \int \cos^6 x dx + \int \sin^6 x dx$ bằng:

(A) $F(x) = \frac{5}{8}x - \frac{3}{8}\sin 4x + C$; **(B)** $F(x) = \frac{5}{8}x - \frac{3}{32}\sin 4x + C$;

(C) $F(x) = \frac{5}{8}x + \frac{3}{32}\sin 4x + C$; **(D)** $F(x) = \frac{5}{8}x + \frac{3}{8}\sin 4x + C$.

19. Họ nguyên hàm $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$ bằng:

(A) $x - \ln(e^x + 1) + C$; **(B)** $\ln(e^x + 1) + C$;

(C) $x^2 + \ln(e^x + 1) + C$; **(D)** Kết quả khác.

20. Hàm số $F(x) = \sin^2 2x$ là một nguyên hàm của hàm số:

(A) $f(x) = \cos^2 2x$; **(B)** $f(x) = 2\sin 4x$;

(C) $f(x) = 4\cos 4x$; **(D)** $f(x) = \sin 4x$.

21. Nguyên hàm của $\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2$ bằng:

(A) $\dfrac{\frac{x^3}{3} + x}{\frac{x^2}{2}} + C$; **(B)** $\left(\dfrac{\frac{x^3}{3} + x}{\frac{x^2}{2}}\right)^2 + C$;

(C) $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + 2x + C$; **(D)** $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x + C$.

22. $\int 2\sin 4x.\cos 2x dx$ bằng:

(A) $-\left(\frac{1}{6}\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C$; **(B)** $\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x + C$;

(C) $\frac{1}{6}\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$; **(D)** $-\left(\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right) + C$.

23. $\int (2^x - 4^x) dx$ bằng:

(A) $\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{(2^x)^2}{\ln 2} + C$; **(B)** $\frac{2^x}{\ln 2}(1 - 2^{x-1}) + C$;

(C) $\frac{2^x}{\ln 2}\left(1-\frac{4^x}{\ln 2}\right)+C$; (D) $\frac{2^x}{2\ln 2}(1-2^x)+C$.

24 $\int\left(3^x-\frac{1}{3^x}\right)^2 dx$ bằng:

(A) $\left(\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{\ln 3}{3^x}\right)^2+C$; (B) $\frac{1}{3}\left(\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{1}{3^x\ln 3}\right)^3+C$;

(C) $\frac{9^x}{2\ln 3}-\frac{1}{2.9^x\ln 3}-2x+C$; (D) $\frac{1}{2\ln 3}\left(9^x+\frac{1}{9^x}\right)-2x+C$.

25 Họ nguyên hàm $\int xe^x dx$ bằng:

(A) $\frac{1}{2}x^2e^x+C$; (B) $(x-1)e^x+C$;

(C) $(x+2)e^x+C$; (D) $(x+1)e^{2x}+C$.

26. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ là:

(A) $(x+1)\ln x$; (B) $\frac{1}{x}$; (C) $(x-1)\ln x$; (D) $x(\ln x-1)$.

27. $\int e^{1-3x}dx$ bằng:

(A) $\frac{3}{e^{1-3x}}+C$; (B) $\frac{e^{1-3x}}{3}+C$; (C) $-\frac{3e}{e^{3x}}+C$; (D) $-\frac{e}{3e^{3x}}+C$.

28. $\int\frac{1}{e^{2-5x}}dx$ bằng:

(A) $\frac{5}{e^{2-5x}}+C$; (B) $-\frac{5}{e^{2-5x}}+C$; (C) $-\frac{e^{5x-2}}{5}+C$; (D) $\frac{e^{5x}}{5e^2}+C$.

29. Họ nguyên hàm $\int\frac{\ln^4 x}{x}dx$ bằng:

(A) $3\ln^3 x+C$; (B) $\frac{\ln^3 x}{3}+C$;

(C) $\frac{\ln^5 x}{5}+C$; (D) $\frac{\ln^4 x}{4}+C$.

30. Họ nguyên hàm $\int\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$ bằng:

(A) $e^{\cot x}+C$; (B) $e^{\tan x}+C$;

(C) $2e^{\cot x}+C$; (D) $\frac{1}{2}e^{\tan x}+C$.

B ĐÁP ÁN.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	**(D)**	**(C)**	**(D)**	**(C)**	**(D)**	**(C)**	**(D)**	**(A)**	**(D)**	**(C)**

Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	**(A)**	**(D)**	**(B)**	**(D)**	**(B)**	**(D)**	**(A)**	**(C)**	**(A)**	**(B)**

Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Đáp án	**(D)**	**(A)**	**(B)**	**(C)**	**(B)**	**(D)**	**(D)**	**(D)**	**(C)**	**(B)**

C. HƯỚNG DẪN CHỌN ĐÁP ÁN.

1. $(x\sin x)' = \sin x + x\cos x = (-\cos x)' + x\cos x \Rightarrow (x\sin x + \cos x)' = x\cos x$.

Vậy nguyên hàm của xcosx là xsinx + cosx + C. Chọn **(D)**.

2. $f(x) = 1 + 4\dfrac{\tan^2\dfrac{x}{2}}{\left(\tan^2\dfrac{x}{2} - 1\right)} = 1 + \left(\dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1 - \tan^2\dfrac{x}{2}}\right)^2 = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Nguyên hàm của f(x) là F(x) = tanx + C.

Ta có $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3 \Leftrightarrow \tan\dfrac{\pi}{4} + C = 3 \Leftrightarrow C = 2$.

Vậy F(x) = tanx + 2. Chọn **(C)**.

3. $y = \ln|\sin x - 3\cos x| \Rightarrow y' = \dfrac{\cos x + 3\sin x}{\sin x - 3\cos x}$

Vậy $y = \ln|\sin x - 3\cos x|$ là một nguyên hàm số $y = \dfrac{\cos x + 3\sin x}{\sin x - 3\cos x}$.

Chọn **(D)**.

4. $F(x) = -\dfrac{5}{x+2} + C$ mà F(3) = 1 nên $-\dfrac{5}{3+2} + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$.

Vậy $F(x) = -\dfrac{5}{x+2} + 2 = \dfrac{2x-1}{x+2}$. Chọn **(C)**.

5. Ta có $F'(x) = 1 + \dfrac{(2\sin x - \cos x)'}{2\sin x - \cos x} = 1 + \dfrac{2\cos x + \sin x}{2\sin x - \cos x} = \dfrac{3\sin x + \cos x}{2\sin x - \cos x}$.

Vậy F(x) là một nguyên hàm của $\dfrac{3\sin x + \cos x}{2\sin x - \cos x}$. Chọn **(D)**.

6. Ta có $F'(x) = \dfrac{-2x^2 + 4x}{(1-x)^2} = \dfrac{-2x^2 + 4x}{(x-1)^2}$.

Vậy F(x) là một nguyên hàm của $\dfrac{-2x^2 + 4x}{(x-1)^2}$. Chọn **(C)**.

7. $\int 2x(1 + 3x^3)dx = \int (2x + 6x^4)dx = x^2 + \dfrac{6}{5}x^5 + C = x^2\left(1 + \dfrac{6x^3}{5}\right) + C$.

Chọn **(D)**.

8. $\int\left(\dfrac{1}{x^2} - x^2 - \dfrac{1}{3}\right)dx = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x}{3} + C = -\dfrac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$. Chọn **(A)**.

9. $\frac{2-x}{x^2+2x} = \frac{2-x}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \Leftrightarrow (A+B)x + 2A = -x + 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ 2A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-2 \end{cases}$. Chọn **(D).**

10. $A - B = \int(\sin^2 x - \cos^2 x)dx = \int(-\cos 2x)dx = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$. Chọn **(C).**

11. $\int \frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int\left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = 2\sqrt{x} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C$

$= 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}} + C$. Chọn **(A).**

12. $\int(9x^2 - 6x + 1)^2dx = \int(3x-1)^4dx = \frac{1}{3}.\frac{(3x-1)^5}{5} + C$. Chọn **(D).**

13. $F(x) = \int(\cot^2 3x + 1)dx = \int\frac{1}{\sin^2 3x}dx = -\frac{1}{3}\cot 3x + C$.

Chú ý: $\tan 3x = \tan(2x + x) =$

$\frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan x.\tan 2x} \Rightarrow \cot 3x = \frac{1}{\tan 3x} = \frac{1 - \tan x.\tan 2x}{\tan 2x + \tan x}$. Chọn **(B).**

14. $F(x) = \int -\cos x dx = -\sin x + C$. Chọn **(D).**

15. $\int(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x^2 - 2x + 1)^2dx = \int(x-1)^7dx = \frac{(x-1)^8}{8} + C$. Chọn **(B).**

16. $\int\frac{1}{2-3x}dx = -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + C = -\frac{1}{3}|3x-2| + C$.

(***Chú ý:*** $|A| = |-A|, \forall A \in R$). Chọn **(D).**

17. $[x(\ln x - 1)]' = \ln x - 1 + x\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x \Rightarrow [x(\ln x - 1) + \ln x]' = \ln x + \frac{1}{x}$.

Vậy nguyên hàm của $\ln x + \frac{1}{x}$ là $F(x) = x(\ln x - 1) + \ln x + C$

Hay $F(x) = (x+1)\ln x - x + C$. Chọn **(A).**

18. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$.

Vậy $F(x) = \int(\cos^6 x + \sin^6 x)dx = \int\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x\right)dx = \frac{5}{8}x + \frac{3}{32}\sin 4x + C$.

Chọn **(C).**

19. Ta có: $\int\frac{1}{1+e^x}dx = \int\left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \int dx - \int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = x - \ln(e^x+1) + C$.

Chọn **(A).**

20. Ta có: $F'(x) = (\sin^2 2x)' = 2.2\cos 2x.\sin 2x = 2\sin 4x$.
Vậy $F(x) = \sin^2 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin 4x$.
Chọn **(B)**.

21. $\int\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 dx = \int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+2x+C.$
Chọn **(D)**.

22. $\int 2\sin 4x.\cos 2x dx = \int(\sin 6x + \sin 2x)dx$

$$= -\left(\frac{1}{6}.\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C.$$ Chọn **(A)**.

23. $\int(2^x - 4^x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{4^x}{\ln 4} + C = \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{(2^x)^2}{2\ln 2} + C = \frac{2^x}{\ln 2}(1 - 2^{x-1}) + C.$
Chọn **(B)**.

24. $\int\left(3^x - \frac{1}{3^x}\right)^2 = \int\left(9^x + \frac{1}{9^x} - 2\right)dx$

$= \int(9^x + 9^{-x} - 2)dx = \frac{9^x}{\ln 9} - \frac{9^{-x}}{\ln 9} - 2x + C$

$= \frac{9^x}{2\ln 3} - \frac{1}{2.9^x.\ln 3} - 2x + C.$ Chọn **(C)**.

25. Đặt $u = x$ và $dv = e^x dx$ ta được $du = dx$ và $v = e^x$.
Áp dụng công thức tính tích phân từng phần:
$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C.$ Chọn **(B)**.

26. Ta tính $\int \ln x dx$.
Đặt $u = \ln x$ và $dv = dx$, ta được $du = \frac{1}{x}dx$ và $v = x$.
Áp dụng công thức tính tích phần từng phần:
$\int \ln x dx = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C.$ Chọn **(D)**.

27. $\int e^{1-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{1-3x} + C = -\frac{e}{3e^{3x}} + C.$ Chọn **(D)**.

28. $\int\frac{1}{e^{2-5x}}dx = \int e^{5x-2}dx = \frac{1}{5}e^{5x-2} + C = \frac{e^{5x}}{5e^2} + C.$ Chọn **(D)**.

29. Ta có: $\int\frac{\ln^4 x}{x}dx = \int \ln^4 x d(\ln x) = \frac{\ln^5 x}{5} + C.$ Chọn **(C)**.

30. Ta có: $\int\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx = \int e^{\tan x}d(\tan x) = e^{\tan x} + C.$ Chọn **(B)**.

Chương II. TÍCH PHÂN

§1. Khái niệm tích phân và các tính chất

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm tích phân

Định nghĩa

Cho hàm số f liên tục trên K và a, b là hai số bất kì thuộc K. Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân của f từ a đến b và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Trong trường hợp $a < b$, ta gọi $\int_a^b f(x)dx$ là tích phân của f trên đoạn $[a; b]$.

Người ta còn dùng kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$. Như vậy nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b}$.

Vì $\int f(x)dx$ là một nguyên hàm bất kì của f nên ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b.$$

Chú ý

Đối với biến số lấy tích phân, ta có thể chọn bất kì một chữ khác thay cho x. Chẳng hạn, nếu sử dụng chữ t, chữ u, ... làm biến số lấy tích phân thì $\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b f(u)du$, ... đều là một số và số đó bằng $F(b) - F(a)$.

2. Định lí 1

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $S = \int_a^b f(x)dx$.

3. Tính chất của tích phân

Định lí 2

Giả sử các hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c là ba số bất kì thuộc K. Khi đó ta có

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

3) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$;

4) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

5) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ với $k \in \mathbb{R}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH

DẠNG 1. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG CÁCH DÙNG GIỚI HẠN

Phương pháp

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a\ ;\ b]$

Bước 1. Chia đều đoạn $[a\ ;\ b]$ bởi các điểm :

$$x_0 = a\ , \dots ,\ x_i = x_0 + \frac{b-a}{n}.i\ , \dots ,\ x_n = b$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

Bước 2. Tính tổng tích phân : $\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$

Bước 3. Tìm $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$

Bước 4. Ta được : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$

• Ghi chú : Ta thường dùng các tổng :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} C = n.C \text{ (C là hằng số)}$$

Ví dụ 1. Dùng giới hạn để tính tích phân $\int_0^1 x^2 dx$.

Giải

– Phép phân hoạch: Chia đoạn [0; 1] thành n phần bằng nhau. Độ dài mỗi đoạn là $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ và các điểm chia là:

$$x_0 = 0;\ x_1 = \frac{1}{n};\ x_2 = \frac{2}{n};\ x_i = \frac{i}{n};\ ...;x_n = \frac{n}{n} = 1 \text{ và chọn } \xi_i = \frac{i}{n}$$

– Tổng tích phân: Ta có $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$

– Giới hạn: Theo định nghĩa

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

Chú ý. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ví dụ 2. Dùng giới hạn tính tích phân $\int_0^3 (2x+1)dx$.

Giải

– Phép phân hoạch: Chia đoạn [0; 3] thành n phần bằng nhau. Độ dài mỗi đoạn là $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{3}{n}$ và các điểm chia: $x_0 = 0;\ x_1 = \frac{3}{n};\ x_2 = 2.\frac{3}{n};$ $...;\ x_i = i\frac{3}{n};\ ...;\ x_n = 3$

– Tổng tích phân: Chọn $\xi_i = x_i = i\frac{3}{n}$

Ta có: $f(\xi_i) = 2\xi_i + 1 = 2i\frac{3}{n} + 1 = i\frac{6}{n} + 1$

Từ đó: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(i\frac{6}{n}+1\right)\frac{3}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{18}{n^2}i + \frac{3}{n}\right) = n.\frac{3}{n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{18}{n^2}i$

$$= 3 + \frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = 3 + \frac{18n(n+1)}{2n^2} = 3 + 9\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

– Giới hạn:

Ta có $\int_0^3 (2x+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[3+9\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = 12$

Chú ý. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ví dụ 3. Dùng giới hạn tính tích phân $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ $(0 < a < b)$

Giải

Cách 1

– Phép phân hoạch: Chia đoạn $[a; b]$ thành n phần bằng nhau. Độ dài mỗi đoạn là $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ và các điểm chia là:

$$x_0 = a; \quad x_1 = \frac{b-a}{n} + a; \quad x_2 = 2\frac{b-a}{n} + a; \quad ..., \quad x_i = i\frac{b-a}{n} + a; \quad ...,$$

$$x_n = n\frac{b-a}{n} + a = b$$

– Tổng tích phân: Chọn $\xi_i = \sqrt{x_i.x_{i-1}}$ (hiển nhiên $x_{i-1} < \xi_i < x_i$).

Khi đó: $f(\xi_i) = \frac{1}{(\xi_i)^2} = \frac{1}{x_{i-1}.x_i}$

và $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i.x_{i-1}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right)$

$$= \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + ... + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

– Giới hạn: Ta có $\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

Cách 2

Ta giải bài toán bằng cách chọn một phép phân hoạch khác.

– Phép phân hoạch:

Ta chia đoạn $[a; b]$ bởi các điểm chia tạo thành cấp số nhân:

$x_0 = a$; $x_1 = aq$; $x_2 = aq^2$, ..., $x_i = aq^i$; ..., $x_n = aq^n = b$

với: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = aq^i - aq^{i-1} = aq^{i-1}(q-1)$

trong đó: $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$

– Tổng tích phân

Chọn $\xi_i = x_i = aq^i$, ta có: $f(\xi_i) = \frac{1}{(\xi_i)^2} = \frac{1}{(aq^i)^2}$

Từ đó: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(aq^i)^2} aq^{i-1}(q-1)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{aq^{i+1}}(q-1) = \frac{q-1}{a}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q^{i+1}}$$

$$= \frac{q-1}{a}\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+...+\frac{1}{q^{n+1}}\right) = \frac{q-1}{a}.\frac{1}{q^2}\left(1+\frac{1}{q}+...+\frac{1}{q^{n-1}}\right)$$

Các số hạng trong ngoặc vuông tạo thành một cấp số nhân có n số hạng, số hạng đầu là 1, công bội là $\frac{1}{q}$ nên có tổng số là: $\dfrac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^n}{1-\frac{1}{q}}$.

Do đó: $$S_n = \frac{q-1}{a}.\frac{1}{q^2}.\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^n}{1-\frac{1}{q}} = \frac{1}{aq}\left(1-\frac{1}{q^n}\right) = \frac{1}{aq}-\frac{1}{aq^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}-\frac{1}{a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}-\frac{1}{a\left(\frac{b}{a}\right)^{1+\frac{1}{n}}}$$

– Giới hạn: $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}-\frac{1}{a\left(\frac{b}{a}\right)^{1+\frac{1}{n}}}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a\left(\frac{b}{a}\right)^{1+\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

Vậy: $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}-\frac{1}{b}$.

• **Nhận xét**. Qua bài toán trên ta thấy rõ là, bằng hai cách phân hoạch khác nhau ta vẫn đạt được kết quả như nhau. Điều này càng làm rõ thêm rằng tích phân (xác định) của một hàm $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ theo định nghĩa hoàn toàn không phụ thuộc vào việc chọn phép phân hoạch và các điểm ξ_i.

Ví dụ 4. Dùng giới hạn tính tích phân $\displaystyle\int_a^b \sin x dx$ $(0 < a < b)$.

Giải

– Phép phân hoạch: Chia đoạn $[a; b]$ thành n đoạn bằng nhau. Độ dài mỗi đoạn $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = h$ và các điểm chia là: $x_0 = a$; $x_1 = a + h$; $x_2 = a+2h$; ..., $x_i = a+ih$, ..., $x_n = a+nh = b$.

– Tổng tích phân: Chọn $\xi_i = a+ih$ $(i = 1, 2, ..., n)$, ta có: $f(\xi_i) = \sin(a+ih)$

Và $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \sin(a+ih).h = \dfrac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n} 2\sin(a+ih)\sin\dfrac{h}{2}$

$$= \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left\{\cos\left[a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right]-\cos\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right]\right\}$$

$$= \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left\{\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)+\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)\right.$$

$$\left.-\cos\left(a+\frac{5}{2}h\right)...-\cos\left[a+\left(n+\frac{1}{2}\right)h\right]\right\}$$

$$= \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left\{\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left[a+\left(n+\frac{1}{2}\right)h\right]\right\}$$

$$\Rightarrow \lim S_n = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(\underbrace{a+nh}_{b}+\frac{1}{2}h\right)\right] = \cos a - \cos b$$

Vậy: $\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$.

Ví dụ 5. Dùng giới hạn tính tích phân $\int_0^1 e^x dx$.

Giải

– Phép phân hoạch: Chia đoạn [0; 1] thành n phần bằng nhau. Độ dài mỗi đoạn là $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{1}{n}$ và các điểm chia là:

$x_0 = 0;\ x_1 = \dfrac{1}{n};\ x_2 = \dfrac{2}{n}, ..., x_i = \dfrac{i}{n}; ..., x_n = \dfrac{n}{n} = 1.$

– Tổng tích phân: Chọn $\xi_i = x_i = \dfrac{i}{n}$ ($i = 1, ..., n$), ta có:

$f(\xi_i) = e^{\xi_i} = e^{\frac{i}{n}}$ ($i = 1, ..., n$).

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n}{n}}\right) = \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$$

$$= e^{\frac{1}{n}}(e-1)\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1} \quad \left(\text{Vì } e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \ldots + e^{\frac{n}{n}} = e^{\frac{1}{n}}\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right)$$

(Tổng các số hạng của cấp số nhân có công bội $q = e^{\frac{1}{n}}$ và số hạng đầu $u_1 = e^{\frac{1}{n}}$)

- Giới hạn: $\int_0^1 e^x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = (e-1)\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1} = e-1.$

Chú ý. $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1} = 1.$

DẠNG 2. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG CÁCH DÙNG NGUYÊN HÀM

Phương pháp

- Tính $\int_a^b f(x)dx$
- Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$
- Sử dụng công thức : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Ví dụ 1. Tính tích phân: **a)** $I = \int_0^1 \frac{xdx}{x+1}$; **b)** $J = \int_{-1}^e \frac{xdx}{x^2+2}$.

Giải

a) $I = \int_0^1 \frac{xdx}{x+1} = \int_0^1 \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = \left(x - \ln|x+1|\right)\Big|_0^1$

$= 1 - \ln 2 - 0 + \ln 1 = 1 - \ln 2$

b) $J = \int_{-1}^e \frac{xdx}{x^2+2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^e \frac{d(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{1}{2}\ln|x^2+2|\Big|_{-1}^e$

$= \frac{1}{2}\left[\ln(e^2+2) - \ln 3\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{e^2+2}{3}$

Ví dụ 2. Tính tích phân:

a) $I = \int_1^2 \frac{x^3}{x+2}dx$; **b)** $J = \int_1^e \frac{x^2-3x+5}{x+1}dx$.

Giải

a) $I = \int_1^2 \frac{x^3 + 2^3 - 2^3}{x+2} dx = \int_1^2 \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 2^2) - 2^3}{x+2} dx$

$= \int_1^2 (x^2 - 2x + 4)dx - \int_1^2 \frac{8dx}{x+2}$

$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right)\Bigg|_1^2 - 8\ln|x+2|\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} - 4 + 8 - \frac{1}{3} + 1 - 4 - 8\ln 4 + 8\ln 3$

$= \frac{10}{3} + 8\ln\frac{3}{4}$

b) $J = \int_1^e \frac{x^2 - 3x + 5}{x+1} dx = \int_1^e \frac{x^2 - 3x - 4 + 9}{x+1} = \int_1^e \left[\frac{(x+1)(x-4)}{x+1} + \frac{9}{x+1}\right] dx$

$= \int_1^e \left(x - 4 + \frac{9}{x+1}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 9\ln|x+1|\right)\Bigg|_1^e$

$= \frac{e^2}{2} - 4e + 9\ln(e+1) - \frac{1}{2} + 4 - 9\ln 2 = 9\ln(e+1) - 9\ln 2 + \frac{e^2}{2} + \frac{7}{2}.$

Ví dụ 3. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x + \sin^3 x)dx$.

(Đại học An ninh – 1998, khối A và D)

Giải

Cách 1. Ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x + \sin^3 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) d(\sin x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)(-d\cos x)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\sin x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d(\sin x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\cos x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d(\cos x)$$

$$= \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3}\sin^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \frac{1}{3}\left(\sin^3\frac{\pi}{2} - \sin^3 0\right) - \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) + \frac{1}{3}\left(\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos^3 0\right)$$

$$= (1-0) - \frac{1}{3}(1-0) - (0-1) + \frac{1}{3}(0-1) = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{3}$$

Cách 2. Biết: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$; $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

Suy ra: $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$; $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 x + \sin^3 x)dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos x + \cos 3x + 3\sin x - \sin 3x)dx$

$$= \left(\frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x - \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) + \frac{1}{12}\left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin 0\right) - \frac{3}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) + \frac{1}{12}(0 - \cos 0)$$

$$= \frac{3}{4}(1-0) + \frac{1}{12}(1-0) - \frac{3}{4}(0-1) + \frac{1}{12}(0-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{3}$$

Ví dụ 4. Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos 4x dx$.

(Đại học Ngoại ngữ – 1998, chưa phân ban)

Giải

Biến đổi lượng giác, ta có:

$$\sin^2 x\cos 4x = \frac{1+\cos 2x}{2}.\cos 4x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 4x\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 4x + \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)\right] = \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 2x$$

Do đó:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos 4x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 2x\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8}(\sin 2\pi - \sin 0) + \frac{1}{24}(\sin 3\pi - \sin 0) + \frac{1}{8}(\sin \pi - \sin 0) \Rightarrow I = 0$$

Ví dụ 5. Tính tích phân $f(t) = \int_0^t \left(4\cos^4 x - \frac{3}{2}\right)dx$ từ đó giải phương trình: $f(t) = 0$

(Đại học Sư phạm Hà Nội – 1995, khối A)

Giải

* Ta có: $4\cos^4 x = (2\cos^2 x)^2 = (1 + \cos 2x)^2 = 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x$

$$= 1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) = \frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x$$

Do đó: $f(t) = \int_0^t \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{3}{2}\right)dx = \int_0^t 2\cos 2x dx + \frac{1}{2}\int_0^t \cos 4x dx$

$$= \left(2.\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^t = \left(\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right)\Big|_0^t = \sin 2t + \frac{1}{8}\sin$$

* Giải phương trình: $f(t) = 0 \Leftrightarrow \sin 2t + \frac{1}{8}\sin 4t = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 2t\left(1 + \frac{1}{4}\cos 2t\right) = 0$$

Suy ra $\sin 2t = 0$; $\cos 2t = -4$ (vô nghiệm vì $\cos 2t \geq -1$)

Do đó phương trình có nghiệm số: $2t = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{2}$

Ví dụ 6. a) Cho hai hàm số: $f(x) = 4\cos x + 3\sin x$

$$g(x) = \cos x + 2\sin x$$

Tìm các số *A*, *B* thỏa mãn $g(x) = Af(x) + Bf'(x)$.

b) Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{g(x)dx}{f(x)}$.

(Đại học Xây dựng – 1998, chưa phân ban)

Giải

a) Ta có: $f(x) = 4\cos x + 3\sin x$; $f'(x) = -4\sin x + 3\cos x$

Do đó: $g(x) = Af(x) + Bf'(x)$

$$\cos x + 2\sin x = A(4\cos x + 3\sin x) + B(-4\sin x + 3\cos x)$$

$$= 4A\cos x + 3B\cos x + 3A\sin x - 4B\sin x$$

$$= (4A + 3B)\cos x + (3A - 4B)\sin x$$

Suy ra: $\begin{cases} 4A + 3B = 1 \\ 3A - 4B = 2 \end{cases}$

Giải ra, ta được: $A = \frac{2}{5}$ và $B = -\frac{1}{5}$.

b) Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{g(x)dx}{f(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{Af(x) + Bf'(x)}{f(x)} dx = A\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + B\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

$= Ax\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + B\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{df(x)}{f(x)} = A\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + B\ln|f(x)|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= A\frac{\pi}{4} + B\ln|4\cos x + 3\sin x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\pi}{10} - \frac{1}{5}\left(\ln\frac{7\sqrt{2}}{2} - \ln 4\right) = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{5}\ln\frac{7\sqrt{2}}{8}$

Vậy: $I = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{5}\ln\frac{7\sqrt{2}}{8}$.

Ví dụ 7. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x)\cos x dx$.

(Đại học khối D – 2005)

Giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} d(\sin x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = e^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e + \frac{\pi}{4} - 1.$$

Ví dụ 8. Tính tích phân: $I = \int_0^1 (3^x + 4^x)^2 dx$.

Giải

Ta có: $I = \int_0^1 (3^x + 4^x)^2 dx = \int_0^1 \left[(3^x)^2 + 2.3^x.4^x + (4^x)^2\right] dx$

$= \int_0^1 (3^{2x} + 2.12^x + 4^{2x}) dx$

$= \frac{1}{2}.\frac{3^{2x}}{\ln 3} + \frac{2.12^x}{\ln 12} + \frac{1}{2}.\frac{4^{2x}}{\ln 4}\Big|_0^1$

$= \frac{3}{2\ln 3} + \frac{24}{\ln 12} + \frac{8}{\ln 4} - \frac{1}{2\ln 3} - \frac{2}{\ln 12} - \frac{1}{2\ln 4}$

$= \frac{22}{\ln 12} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{15}{2\ln 4}$.

Ví dụ 9. Tính tích phân: $I = \int_0^{\ln 2} \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$.

Giải

$$I = \int_0^{\ln 2} \frac{1-e^x}{1+e^x} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{1+e^x-2e^x}{1+e^x} dx = \int_0^{\ln 2} dx - \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} dx - 2\int_0^{\ln 2} \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} dx$$

$$= x - 2\ln\left|1+e^x\right|\Big|_0^{\ln 2} = \ln 2 - 2\ln\left|1+2^{\ln 2}\right| + 2\ln 2 = 3\ln 2 - 2\ln\left|1+2^{\ln 2}\right|$$

DẠNG 3. TÍCH PHÂN LIÊN KẾT

Phương pháp

Cho tích phân B ghép với tích phân A sao cho tính được $A + B$ và $A - B$, từ đó suy ra tích phân cần tìm A.

Ví dụ 1. Cho 2 tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$ và $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx$. Tính: $I + J$ và $I - J$. Suy ra giá trị của I và J.

Giải

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4 x + \sin^4 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2 x\cos^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\right)dx = \left(\frac{3x}{4} + \frac{1}{16}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{16}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4 x - \sin^4 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

Ta có hệ: $\begin{cases} I + J = \dfrac{3\pi}{16} \\ I - J = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \dfrac{3\pi}{32} + \dfrac{1}{4} \\ J = \dfrac{3\pi}{32} - \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Ví dụ 2. Cho $I = \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}$ và $J = \int_0^1 \frac{e^{-x} dx}{e^x + e^{-x}}$. Tính: $I + J$ và $I - J$. Suy ra giá trị của I và J.

Giải

$$I + J = \int_0^1 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) dx = \int_0^1 1.dx = x \Big|_0^1 = 1$$

$$I - J = \int_0^1 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) dx = \int_0^1 \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}} dx = \ln(e^x + e^{-x}) \Big|_0^1 = \ln(e + e^{-1}) - \ln 2$$

$$= \ln \frac{e + \frac{1}{e}}{2} = \ln \frac{e^2 + 1}{2e}$$

Ta có hệ: $\begin{cases} I + J = 1 \\ I - J = \ln \dfrac{e^2 + 1}{2e} \end{cases}$

Suy ra: $I = \frac{1}{2} \ln \frac{e^2 + 1}{2e} + \frac{1}{2}$; $J = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{e^2 + 1}{2e}$.

Ví dụ 3. Cho hai tích phân sau:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos^2 2x dx \quad ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 2x dx$$

a) Tính $I + J$ và $I - J$

b) Tính I và J

(Học viện Ngân hàng (Phân viện TP.HCM – 1998))

Giải

a) Tính $I + J$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \sin^2 x) \cos^2 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos 4x dx$$

$$= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{8} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} (\sin 2\pi - \sin 0)$$

$$\Rightarrow I + J = \frac{\pi}{4} \qquad (1)$$

Tính $I - J$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos^2 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 2x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos 2x + \cos 6x) dx$$

$$= \frac{3}{4}.\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}.\frac{1}{6}\sin 6x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}(\sin\pi - \sin 0) + \frac{1}{24}(\sin 3\pi - \sin 0)$$

$\Rightarrow I - J = 0$ (2)

b) Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} I + J = \dfrac{\pi}{4} \\ I - J = 0 \end{cases}$ ta suy ra: $2I = \dfrac{\pi}{4}$ và $I = J$

Vậy: $I = J = \dfrac{\pi}{8}$.

Ví dụ 4. Tính tích phân: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin x}$.

Giải

Xét $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin x}$ và $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\cos x + \sin x}$

Ta có: $I + J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\cos x + \sin x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \Leftrightarrow I + J = x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

và $I - J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x} dx = -\ln|\cos x + \sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$

Ta có: $\begin{cases} I + J = \dfrac{\pi}{4} \\ I - J = \dfrac{1}{2}\ln 2 \end{cases} \Rightarrow I = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}\ln 2$

DẠNG 4. TÍNH TÍCH PHÂN HÀM CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

Phương pháp

- Xét dấu $f(x)$ để tìm những đoạn trên đó $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, để bỏ trị số tuyệt đối
- Áp dụng tính chất : $\forall a, b, c \in (\alpha ; \beta)$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau: **a)** $\int_{-3}^{3}|x-2|dx$ **b)** $\int_{0}^{2}|x^2-1|dx$.

Giải

a) $\int_{-3}^{3}|x-2|dx$

x	-3		2		3
$x-2$	|	$-$	0	$+$	|

Vậy: $\int_{-3}^{3}|x-2|dx = \int_{-3}^{2}(-x+2)dx + \int_{2}^{3}(x-2)dx = \left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-3}^{2} + \left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{2}^{3}$

$$= -2+4-\left(-\frac{9}{2}-6\right)+\frac{9}{2}-6-(2-4) = 2+\frac{21}{2}-\frac{3}{2}+2 = 13.$$

b) $\int_{0}^{2}|x^2-1|dx$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	

Vậy: $\int_{0}^{2}|x^2-1|dx = \int_{0}^{1}(-x^2+1)dx + \int_{1}^{2}(x^2-1)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{0}^{1} + \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{1}^{2}$

$$= \left(-\frac{1}{3}+1\right)+\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right) = 2.$$

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int_{0}^{2}|x^2-x|dx$

(Đại học khối D – 2003)

Giải

Ta có $x^2-x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$, suy ra

$$I = \int_{0}^{1}(x-x^2)dx + \int_{1}^{2}(x^2-x)dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} + \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2} = 1.$$

Ví dụ 3. Tính các tích phân

a) $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2(1-\cos 2x)}dx$ **b)** $B = \int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$

Giải

a) $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2(1-\cos 2x)}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\sin^2 x}dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	|	$-$	0	$+$	|

Vậy: $A = -2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin x dx + 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx = 2\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - 2\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$$= 2\left[\cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] - 2\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right] = 4.$$

b) $B = \int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx = \int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2 x}dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos x|dx$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	|	$+$	0	$-$	|

Vậy: $B = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx - \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx = \sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2}\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2\sqrt{2}$.

C. TOÁN TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^3 x dx$.

(Đại học Quốc gia TP.HCM – 1998, khối A)

Bài 2. Tính tích phân: $I = \int_{-2}^{2}\left(10^{\frac{x}{4}} - \sin\pi x\right)dx$.

(Đại học Giao thông Vận tải – 1998)

Bài 3. Tính các tích phân sau:

a/ $I = \int_0^1(e^{2x} - \pi\sin\pi x)dx$ **b/** $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx$.

(Đại học Dân lập Văn Lang TP.HCM – 1997)

Bài 4. Tìm hai số A, B để hàm số $h(x) = \dfrac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}$ có thể biểu diễn được dưới dạng: $h(x) = \dfrac{A\cos x}{(2+\sin x)^2} + \dfrac{B\cos x}{2+\sin x}$, từ đó tính tích phân: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}h(x)dx$.

(Đại học Bách khoa Hà Nội – 1999)

D. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$

Biết: $\cos x dx = d(\sin x)$

$$\sin^2 x \cos^3 x = \sin^2 x \cos^2 x \cos x = \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x$$

Do đó:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin^4 x) d(\sin x)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d(\sin x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x d(\sin x) = \frac{1}{3}\sin^3 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{5}\sin^5 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sin^3 \frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \frac{1}{5}\left(\sin^5 \frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{1}{3}(1-0) - \frac{1}{5}(1-0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

Vậy: $I = \frac{2}{15}$.

Bài 2.

Ta có: $I = \int_{-2}^{2}\left(10^{\frac{x}{4}} - \sin \pi x\right)dx = \int_{-2}^{2} 10^{\frac{x}{4}} dx - \int_{-2}^{2} \sin \pi x dx$

$$= \left[4\frac{10^{\frac{\pi}{4}}}{\ln 10} + \frac{1}{\pi}\cos \pi x\right]\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{4}{\ln 10}\left(\sqrt{10} - \frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \frac{1}{\pi}(\cos 2\pi - \cos(-2\pi)) = \frac{36\sqrt{10}}{10\ln 10}$$

$\Rightarrow I = \frac{18\sqrt{10}}{5\ln 10}$.

Bài 3.

a/ Ta có: $I = \int_0^1 (e^{2x} - \pi \sin \pi x)dx = \int_0^1 e^{2x}dx - \pi \int_0^1 \sin \pi x dx$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \pi.\left(-\frac{1}{\pi}\cos \pi x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^2-1) + (-1-1) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} - 2$$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}(e^2 - 5)$

b/ Ta có: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin x dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \cos x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \left[\cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1 - 0 - 0 + 1 = 2$$

Cách khác. Vì $|\sin x|$ là hàm số chẵn nên ta có:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -2\cos x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -2\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 2$$

Bài 4. Ta có: $h(x) = \dfrac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2} = \dfrac{A\cos x}{(2+\sin x)^2} + \dfrac{B\cos x}{2+\sin x}$

$$= \frac{A\cos x + B\cos x(2+\sin x)}{(2+\sin x)^2} = \frac{(A+2B)\cos x + B\sin x\cos x}{(2+\sin x)^2}$$

Suy ra: $\begin{cases} A+2B=0 \\ \frac{1}{2}B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=2 \\ A=-4 \end{cases}$

Tính tích phân I.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} h(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left[\frac{-4\cos x}{(2+\sin x)^2} + \frac{2\cos x}{2+\sin x}\right] dx$$

$$= -4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d(2+\sin x)}{(2+\sin x)^2} + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d(2+\sin x)}{2+\sin x}$$

$$= -4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (2+\sin x)^{-2} d(2+\sin x) + 2\ln(2+\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$= \frac{4}{2+\sin x} + 2\ln(2+\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 2\ln 2 - 2$$

$\Rightarrow$ I = ln4 – 2.

§2. Một số phương pháp tính tích phân

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương pháp đổi biến số

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là công thức sau đây.

$$\int_a^b f\left[u(x)\right]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du \qquad (1)$$

Trong đó hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K, hàm số $y = f(u)$ liên tục và sao cho hàm hợp $f\left[u(x)\right]$ xác định trên K; a và b là hai số thuộc K.

Công thức (1) được gọi là công thức đổi biến số.

Phương pháp đổi biến số thường được áp dụng theo hai cách sau đây.

Cách 1. Giả sử ta cần tính $\int_a^b g(x)dx$. Nếu ta viết được $g(x)$ dưới dạng $f[u(x)]u'(x)$, thì theo công thức (1) ta có $\int_a^b g(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$.

Vậy bài toán quy về tính $\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$. Trong nhiều trường hợp việc tính tích phân mới này đơn giản hơn.

Cách 2. Giả sử ta cần tính $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Đặt $x = x(t)$ $(t \in K)$ và $a, b \in K$ thỏa mãn $\alpha = x(a)$, $\beta = x(b)$ thì công thức (1) cho ta $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^b f[x(t)]x'(t)dt$.

Vậy bài toán quy về tính $\int_a^b g(t)dt$ (ở đó $g(t) = f[x(t)].x'(t)$). Trong nhiều trường hợp, việc tính tích phân mới này đơn giản hơn.

2. Phương pháp tích phân từng phần

Tương tự như phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, ta cũng có phương pháp tích phân từng phần. Cơ sở của phương pháp này là công thức sau đây:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \qquad (2)$$

Trong đó các hàm số u, v có đạo hàm liên tục trên K và a, b là hai số thuộc K.

Công thức (2) gọi là công thức tích phân từng phần và còn được viết dưới dạng $\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

B. CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH

DẠNG 1. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 1

Phương pháp

Tính : $\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$.

Đặt : $t = \varphi(x)$.

Khi đó : $\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$

Chú ý. 1) $t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x)dx$.

2) $g(t) = \varphi(x) \Rightarrow g'(t)dt = \varphi'(x)dx$.

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.

(Đại học khối A – 2003)

Giải

Đặt $t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow dt = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$ và $x^2 = t^2 - 4$.

Với $x = \sqrt{5}$ thì $t = 3$, với $x = 2\sqrt{3}$ thì $t = 4$.

Khi đó $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int_3^4 \frac{dt}{t^2-4} = \frac{1}{4}\int_3^4 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)dt$

$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right)\Bigg|_3^4 = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$.

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^1 x^5(1-x^3)^6 dx$; **b)** $J = \int_0^1 x^3(1-x^2)^3 dx$.

Giải

a) Ta có: $I = \int_0^1 x^3(1-x^3)^6 x^2 dx$

Đặt: $t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = -3x^2dx$

Đổi biến

$x = 0 \Rightarrow t = 1$

$x = 1 \Rightarrow t = 0$

$$I = -\frac{1}{3}\int_1^0 (1-t)t^6 dt = \frac{1}{3}\int_0^1 (t^6 - t^7)dt = \frac{1}{3}\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^8}{8}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{168}$$

b) $J = \int_0^1 x^3(1-x^2)^3 dx$

Đặt: $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$.

Đổi cận

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = 1$

$$J = \int_0^1 x^3(1-x^2)^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t(1-t)^3.dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (t - 3t^2 + 3t^3 - t^4).dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} - t^3 + \frac{3t^4}{4} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}.\frac{1}{20} = \frac{1}{40}$$

Ví dụ 3. Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{1-x^5}{x(1+x^5)}dx$.

Giải

$$I = \int_0^1 \frac{1-x^5}{x(1+x^5)}dx = \int_0^1 \frac{x^4(1-x^5)}{x^5(1+x^5)}dx$$

Đặt: $u = x^5 \Rightarrow du = 5x^4dx$

Đổi cận

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = 1 \Rightarrow u = 1$

$$I = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{1-u}{u(1+u)}du = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{1+u-2u}{u(1+u)}du = \frac{1}{5}\int_0^1 \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{1+u}\right)du$$

$$= \frac{1}{5}\left(\ln|u| - 2\ln|1+u|\right)\Big|_0^1 = -\frac{2}{5}\ln 2$$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau

a) $I = \int_0^1 \frac{3x^2dx}{\sqrt{x^3+2}}$; **b)** $J = \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$.

Giải

a) Đặt: $t = \sqrt{x^3+2} \Rightarrow t^2 = x^3 + 2 \Rightarrow 2tdt = 3x^2dx$

Đổi cận

$x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}$

$x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{3}$

$$I = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{tdt}{t} = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dt = 2t\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$$

b) Đặt: $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 = 1 - t^2 \Rightarrow xdx = -tdt$

Đổi cận

$x = 0 \Rightarrow t = 1$

$x = 1 \Rightarrow t = 0$

Suy ra: $J = -\int_1^0 (1-t^2)t^2.dt = \int_0^1 (t^2 - t^4).dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

Ví dụ 5. Tính tích phân: $J = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$.

(Đại học Quốc gia TP.HCM – 1996)

Giải

Đặt: $t = 1 + e^{-x} \Rightarrow dt = -e^{-x}dx$

Đổi cận

$x = 0 \Rightarrow t = 2$

$x = 1 \Rightarrow t = 1 + e^{-1}$

Suy ra: $J = \int_2^{1+e^{-1}} \frac{-dt}{t} = \int_{1+e^{-1}}^2 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_{1+e^{-1}}^2 = \ln 2 - \ln(1+e^{-1}) = \ln\frac{2e}{1+e}$.

Ví dụ 6. Tính tích phân: $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$.

(Đại học khối B – 2006)

Giải

Ta có $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{e^{2x} - 3e^x + 2}$.

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$;

Với $x = \ln 3$ thì $t = 3$; với $x = \ln 5$ thì $t = 5$.

$\Rightarrow I = \int_3^5 \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \int_3^5 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\right)dt = \ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|\Big|_3^5 = \ln\frac{3}{2}$.

Ví dụ 7. Tính tích phân: $I = \int_1^e \frac{(\sqrt{1+3\ln x})\ln x}{x}dx$.

(Đại học khối B – 2004)

Giải

$$I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}dx.$$

Đặt $t = \sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3\ln x \Rightarrow 2tdt = 3\frac{dx}{x}$.

$x = 1 \Rightarrow t = 1, x = e \Rightarrow t = 2$.

Ta có $I = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{t^2-1}{3}t^2dt = \frac{2}{9}\int_1^2 (t^4-t^2)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_1^2$.

Vậy $I = \frac{116}{135}$.

Ví dụ 8. Tính tích phân: $I = \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx$.

(Đại học khối A – 2004)

Giải

$I = \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx$. Đặt $\sqrt{x-1} = t \Rightarrow x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = 2tdt$.

$x = 1 \Rightarrow t = 0, x = 2 \Rightarrow t = 1$.

Ta có: $I = \int_0^1 \frac{t^2+1}{1+t}2tdt = \int_0^1 \frac{t^3+t}{1+t}dt = 2\int_0^1\left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{1+t}\right)dt$

=

$$2\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t - 2\ln|t+1|\right]\Big|_0^1 = 2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - 2\ln 2\right] = \frac{11}{3} - 4\ln 2.$$

Ví dụ 9. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx$.

(Đại học khối B – 2005)

Giải

Ta có $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos^2 x}{1+\cos x}dx$

Đặt $t = 1+\cos x \Rightarrow dt = -\sin xdx$.

$x = 0 \Rightarrow t = 2,\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

$I = 2\int_2^1 \frac{(t-1)^2}{t}(-dt) = 2\int_1^2\left(t - 2 + \frac{1}{t}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2} - 2t + \ln|t|\right)\Big|_1^2$

$= 2\left[(2-4+\ln 2) - \left(\frac{1}{2} - 2\right)\right] = 2\ln 2 - 1$.

Ví dụ 10. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$.

(Đại học khối A – 2005)

Giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos x+1)\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx.$$

Đặt $t = \sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{t^2-1}{3} \\ dt = -\dfrac{3\sin x}{2\sqrt{1+3\cos x}}dx \end{cases}$

$x = 0 \Rightarrow t = 2, x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$

$$I = \int_2^1 \left(2\frac{t^2-1}{3}+1\right)\left(-\frac{2}{3}\right)dt = \frac{2}{9}\int_1^2 (2t^2+1)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{2t^3}{3}+t\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \frac{2}{9}\left[\left(\frac{16}{3}+2\right)-\left(\frac{2}{3}+1\right)\right] = \frac{34}{27}.$$

Ví dụ 11. Tính tích phân: $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx$.

(Đại học khối A – 2006)

Giải

Ta có: $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+3\sin^2 x}}dx$.

Đặt $t = 1+3\sin^2 x \Rightarrow dt = 3\sin 2x dx$.

Với $x = 0$ thì $t = 1$, với $x = \dfrac{\pi}{2}$ thì $t = 4$.

Suy ra: $I = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\sqrt{t}\Bigg|_1^4 = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 12. Tính tích phân: $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin x\cos^3 x dx$.

(Đại học Kiến trúc Hà Nội – 999)

Giải

Ta có: $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin x\cos^3 x dx$

Đặt $t = \sin^2 x$ thì $dt = 2\sin x\cos x dx \Rightarrow \sin x\cos x dx = \dfrac{1}{2}dt$

Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \cos^2 x (\sin x \cos x dx)$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^t (1-t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)de^t$$

Đặt $u = 1 - t \Rightarrow du = -dt;\ dv = de^t \Rightarrow v = e^t$

$$I = \frac{1}{2}\left[(1-t)e^t\right]\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}(e-2)$$

DẠNG 2. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2

Phương pháp

+ Nếu hàm số có dạng $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ thì đặt $x = \dfrac{a}{b}\sin t$

+ Nếu hàm số có dạng $\sqrt{a^2x^2 - b^2}$ thì đặt $x = \dfrac{b}{a\cos t}$

+ Nếu hàm số có dạng $\sqrt{a^2x^2 + b^2}$ thì đặt $x = \dfrac{b}{a}\tan t$

+ Nếu hàm số có dạng $\sqrt{x(k-x)}$, $(k > 0)$ thì đặt $x = k\sin^2 t$

+ Nếu hàm số có dạng $\dfrac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}}$ thì đặt $x = k\sin t$

+ Nếu hàm số có dạng $\dfrac{1}{x^2 + k^2}$ thì đặt $x = k\tan t$

Ví dụ 1. Tính tích phân: $I = \int_0^2 \dfrac{dx}{(x^2+4)^2}$.

Giải

Đặt $x = 2\tan t \Rightarrow dx = 2(1 + \tan^2 t)dt$

Đổi cận

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

Suy ra: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1+\tan^2 t)dt}{4\tan^2 t + 4} = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\tan^2 t + 1} = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t)dt$

$= \frac{1}{16}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi + 2}{64}$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2+x+1}$.

Giải

a) Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = (1+\tan^2 t)dt$

Đổi cận

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

Do đó: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$

b) $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2+x+1} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2 + 2.\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{4}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

Đặt: $x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}}\tan t \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2 t)dt$

Đổi cận

$x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$

Suy ra: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2 t)dt}{\frac{3}{4}\tan^2 t + \frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

Ví dụ 4. Tính tích phân: $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

(Đại học Dân lập Đông Đô – 1996, khối A)

Giải

Ta có: $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

Đặt $x = \sin t$, $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt$

Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Do đó:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t(\cos t dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)dt$$

$$= \frac{1}{8}\left[t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$\Rightarrow I = \dfrac{\pi}{16}$

Ví dụ 5. Tính tích phân: $I = \int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx$

(**Đại học Giao thông – 1996**)

Giải

Ta có: $I = \int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx$

Đặt $t^2 = 1 + x^2$ thì $2tdt = 2xdx \Rightarrow tdt = xdx$

Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

Do đó: $I = \int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx = \int_0^{\sqrt{3}} x^4\sqrt{1+x^2}xdx = \int_1^2 (t^2-1)^2 t.(tdt) = \int_1^2 (t^2-1)^2 t^2 dt$

$$= \int_1^2 (t^4 - 2t^2 + 1)t^2 dt = \int_1^2 (t^6 - 2t^4 + t^2)dt = \left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_1^2$$

$\Rightarrow I = 8\dfrac{8}{105}$

Ví dụ 5. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(**Đại học Tài chính Kế toán Hà Nội – 1997**)

Giải

Đặt $x = \sin t \quad \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$1 - x^2 = \cos^2 t \Rightarrow dx = \cos t dt$

Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Ta có: $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt$

$= \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4} - 0\right) - \dfrac{1}{4}\left(\sin\dfrac{\pi}{2} - \sin 0\right)$

Vậy: $I = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4}$

DẠNG 3. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Phương pháp

1. Công thức tích phân từng phần

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$ thì $\boxed{\displaystyle\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du}$

Chú ý. Đặt : $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx = G(x) + C \end{cases}$

Ta thường chọn $C = 0 \Rightarrow v = G(x)$.

2. Các dạng cơ bản : Cho $P(x)$ là một đa thức

a) Dạng 1 : $\int P(x)\sin(ax+b)dx$. Đặt : $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin(ax+b)dx. \end{cases}$

b) Dạng 2 : $\int P(x)\cos(ax+b)dx$. Đặt : $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos(ax+b)dx. \end{cases}$

c) Dạng 3 : $\int P(x)e^{ax+b}dx$. Đặt : $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b}dx. \end{cases}$

d) Dạng 4 : $\int P(x)\ln(ax+b)dx$. Đặt : $\begin{cases} u = \ln(ax+b) \\ dv = P(x)dx. \end{cases}$

e) Dạng 5 : $\int e^{ax+b}\sin(a'x+b')dx$ hoặc $\int e^{ax+b}\cos(a'x+b')dx$.

Dùng tích phân từng phần hai lần với $u = e^{ax+b}$.

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$.

(Đại học Sư phạm Vinh – 1999, khối B)

Giải

Ta có: $I = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$

Đặt $u = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow du = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

$$I = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 vdu = x\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1 \left(\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{2} - I + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow 2I = \sqrt{2} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{2} + J$$

Tính: $J = \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$. Khi $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 t}dt}{\frac{1}{\cos t}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t dt}{1-\sin^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\sin t}{1-\sin^2 t} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\sin t} + \frac{1}{1-\sin t}\right)d\sin t$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\ln(\sqrt{2}+1)^2$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right]$$

Ví dụ 2. Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$.

(Đại học An ninh – 1999)

Giải

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 & \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = uv\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} vdu = -x^2 \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$$

Đặt: $\begin{cases} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$

$$I = uv\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} vdu = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{2} + (0 - 1) \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} - 1$$

Ví dụ 3. Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 1)\sin x dx$.

(Viện Đại học Mở Hà Nội – 1997, khối A)

Giải

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 1)\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = J + (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= J - \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)$$

$I = J + 1$

Tính J: $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$; $dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$

Do đó: $J = uv\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} vdu = -x^2 \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x dx$

$$= -\left(\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2} - 0\right) + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(\sin x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(\sin x)$$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = d\sin x \Rightarrow v = \sin x$

$$J = 2\left[x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx\right] = 2\left[\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + 2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = \pi + 2\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0^0\right) = \pi - 2 \quad (2)$$

Thay J ở (2) và (1) ta có: $I = \pi - 2 + 1 \Rightarrow \boxed{I = \pi - 1}$.

Ví dụ 4. Tính tích phân: $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$.

(Đại học Mở TP.HCM – 2000, khối A, B)

Giải

Ta có: $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = \cos xdx \Rightarrow v = \sin x$

$$J = uv\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} vdu = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Vậy: $J = \frac{\pi}{2} - 1$.

Ví dụ 5. Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 xdx$.

(Đại học Bách khoa TP.HCM – 1995)

Giải

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x + x\cos 2x)dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2xdx = \frac{1}{4}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2xdx$$

$I = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}J \qquad (1)$

* Tính J: $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2xdx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2x$

Do đó:

$$J = uv\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v du = \frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x dx = \frac{\pi}{4}(\sin\pi - \sin 0^0) + \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 0 + \frac{1}{4}(\cos\pi - \cos 0^0) = -\frac{1}{2} \quad (2)$$

Thay J ở (2) vào (1), ta có: $I = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow I = \frac{1}{16}(\pi^2 - 4)$.

Ví dụ 6. Tính tích phân: $I = \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$.

(Đại học khối D – 2006)

Giải

$I = \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x - 2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow du = dx,\ v = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$$I = \frac{1}{2}(x-2)e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x} dx = -\frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{5-3e^2}{4}.$$

Ví dụ 7. Tính tích phân: $I = \int_0^1 xe^x dx$.

(Đại học Quốc gia TP.HCM – 1998, khối D)

Giải

Ta có: $I = \int_0^1 xe^x dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = e^x \Rightarrow v = e^x$

Do đó: $I = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 v du = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e^x)\Big|_0^1 = e - (e - 1)$

$\Rightarrow I = 1$.

Ví dụ 8. Tính tích phân: $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$.

(Đại học khối D – 2004)

Giải

$I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2 - x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x-1}{x^2 - x} dx \\ v = x \end{cases}$

$$I = x\ln(x^2 - x)\Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{2x-1}{x-1}dx = 3\ln 6 - 2\ln 2 - \int_2^3 \left(2 + \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$I = 3\ln 6 - 2\ln 2 - \left(2x + \ln|x-1|\right)\Big|_2^3$$

I = 3ln6 – 2ln2 – 2 – ln2 = 3ln3 – 2.

Ví dụ 9. Tính tích phân: $I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx$.

(Đại học khối D – 2007)

Giải

Đặt $u = \ln^2 x$, $dv = x^3dx \Rightarrow du = \frac{2\ln x}{x}dx$, $v = \frac{x^4}{4}$.

Ta có: $I = \frac{x^4}{4}.\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2}\int_1^e x^3 \ln x dx$.

Đặt $u = \ln x$, $dv = x^3dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^4}{4}$.

Ta có: $\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{x^4}{4}.\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3 dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{16}x^4\Big|_1^e = \frac{3e^4+1}{16}$.

Vậy $I = \frac{5e^4 - 1}{32}$.

Ví dụ 10. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 5e^x \sin 2x dx$.

(Đại học Sư phạm Hà Nội 2 – 1997)

Giải

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 5e^x \sin 2x dx = 5\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x dx \Rightarrow \frac{1}{5}I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x dx$

Đặt $u = \sin 2x \Rightarrow du = 2\cos 2x dx$; $dv = de^x \Rightarrow v = e^x$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}I = uv\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} v du = e^x \sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos 2x dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}I = e^{\frac{\pi}{4}} \sin\frac{\pi}{2} - 0 - 2J = e^{\frac{\pi}{4}} - 2J \quad (1)$$

Tính J: $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x de^x$

Đặt $u = \cos 2x \Rightarrow du = -2\sin 2xdx$; $dv = de^x \Rightarrow v = e^x$

$$J = uv\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} vdu = e^x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\sin 2xdx$$

$$\Leftrightarrow J = \left(e^{\frac{\pi}{4}}\cos\frac{\pi}{2} - e^0\cos 0^0\right) + 2I \Leftrightarrow J = -1 + 2I$$

Từ (1) ta suy ra: $\frac{1}{5}I = e^{\frac{\pi}{4}} - 2(-1+2I)$

$$\Leftrightarrow \frac{21}{5}I = e^{\frac{\pi}{4}} + 2 \Rightarrow I = \frac{5}{21}\left(e^{\frac{\pi}{4}} + 2\right).$$

Ví dụ 11. Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos^2 xdx$.

(Đại học Thủy lợi – 1996)

Giải

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xd(e^x)$

Đặt $u = \cos^2 x \Rightarrow du = -2\cos x\sin xdx = -\sin 2xdx$; $dv = d(e^x) \Rightarrow v = e^x$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xd(e^x) = uv\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} vdu = e^x\cos^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 2xdx$$

$$I = \left(e^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{\pi}{2} - e^0\cos^2 0^0\right) + J = -1 + J \qquad (1)$$

Tính J: $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 2xdx$

Đặt $u = \sin 2x \Rightarrow du = 2\cos 2xdx$; $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$$\Rightarrow J = uv\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} vdu = e^x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos 2xdx$$

$$\Leftrightarrow J = 0 - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos 2xdx = 0 - 2J_1 \qquad (2)$$

Tính J_1: $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos 2xdx$

Đặt $u = \cos 2x \Rightarrow du = -2\sin 2x dx$; $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$$J_1 = e^x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x dx = -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x dx = -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2J \quad (3)$$

Thế J_1 ở (3) và (2) ta có:

$$J = 0 - 2\left(-e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2J\right) = 2e^{\frac{\pi}{2}} + 2 - 4J \Leftrightarrow 5J = 2\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow J = \frac{2}{5}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right) (4)$$

Thế J ở (4) vào (1) ta được: $I = -1 + \frac{2}{5}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right) = -\frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{\frac{\pi}{2}}$

Vậy $I = \frac{1}{5}\left(2e^{\frac{\pi}{2}} - 3\right)$.

C. TOÁN TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính tích phân: $I = \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 dx$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ đều có:

$f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$. Tính: $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$.

(Đại học Sư phạm Hà Nội II – 1998)

Bài 3. Tính tích phân: $\int_0^{2\pi} x^2 \sin\frac{x}{2} dx$.

(Đại học Bách khoa Hà Nội – 1997)

Bài 4. Tính tích phân: $\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx$.

(Đại học Sư phạm Quy Nhơn – 1995)

D. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Đặt: $x = \sin t$ với $0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = \cos t dt$.

Đổi cận

$x = 0 \Rightarrow t = 0$.

$x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1-\sin^2 t}\right)^3 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2t + \cos^2 2t)dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 2t dt$$

=

$$\frac{1}{4}.\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sin 2t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 4t)dt = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\left(t + \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}$$

Bài 2. Ta có: $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$

Đặt $x = -t$ thì $dx = -dt$. Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$$\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f(-t)(-dt) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-t)(dt) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx$$

Do đó:

$$I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} [f(x)+f(-x)]dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2-2\cos 2x}dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2(1-\cos 2x)}dx$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 2|\sin x| dx = \int_0^{\pi} 2\sin x dx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 2\sin x dx = -2\cos x\Big|_0^{\pi} + 2\cos x\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= -2(\cos\pi - \cos 0^0) + 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos\pi\right) = -2(-1-1) + 2(0+1) \Rightarrow I = 6$$

Bài 3. Ta có : $I = \int_0^{2\pi} x^2 \sin\frac{x}{2} dx$

Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$; $dv = \sin\frac{x}{2}dx \Rightarrow v = -2\cos\frac{x}{2}$

$$I = uv\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} vdu = -2x^2\cos^2\frac{x}{2}\Bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 4x\cos\frac{x}{2}dx$$

$$= -2[4\pi^2\cos^2\pi - 0] + 4\int_0^{2\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$$

$\Rightarrow I = -8\pi^2 + 4J$ (1)

Tính J: $J = \int\limits_0^{2\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = \cos\frac{x}{2}dx \Rightarrow v = 2\sin\frac{x}{2}$

$\Rightarrow$

$$J = uv\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} vdu = 2x\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} - 2\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{x}{2}dx = 2(2\pi.\sin\pi - 0) - 2\left(-2\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 0 + 4(\cos\pi - \cos 0^0) = -8 (2)$$

Thế J ở (2) vào (1) ta được: $I = -8\pi^2 + 4(-8) \Rightarrow I = -8(\pi^2 + 4)$.

Bài 4. Ta có: $\int\limits_1^{e^\pi}\cos(\ln x)dx$

Đặt $u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = \frac{-1}{x}\sin(\ln x)dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

$$I = uv\Big|_1^{e^\pi} - \int\limits_1^{e^\pi} vdu = [x\cos(\ln x)]\Big|_1^{e^\pi} - \int\limits_1^{e^\pi}\sin(\ln x)dx = e^\pi\cos(\ln e^\pi) - 1\cos(\ln 1) + J$$

$$= e^\pi\cos\pi - 1\cos 0^0 + J = -e^\pi - 1 + J \quad (1)$$

Tính $J = \int\limits_1^{e^\pi}\sin(\ln x)dx$

Đặt $u = \sin(\ln x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\cos(\ln x)dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

$$J = uv\Big|_1^{e^\pi} - \int\limits_1^{e^\pi} vdu = [x\sin(\ln x)]\Big|_1^{e^\pi} - \int\limits_1^{e^\pi}\cos(\ln x)dx = e^\pi\sin(\ln e^\pi) - 1\sin(\ln 1) - I$$

$J = e^\pi\sin\pi - 0 - I = -I$

Thế $J = -I$ vào (1), ta có: $I = -e^\pi - 1 - I$.

Suy ra: $I = \frac{1}{2}(e^\pi + 1)$.

§3. (nâng cao). Toán chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức tích phân, tích phân truy hồi, tìm giới hạn trong phép tính tích phân.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Chứng minh đẳng thức tích phân

– Dùng tính chất: $\forall c \in [a\,;b]: \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Chú ý. $\forall x,t,u \in [a\,;b]: \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$

2. Bất đẳng thức trong tích phân

1) Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$ và $f(x) \le g(x)$

$$\forall x \in [a\,;b] \text{ thì: } \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

2) Nếu f liên tục trên $[a\,;\,b]$ thì: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

3) Nếu f liên tục trên $[a\,;\,b]$ và $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a\,;b]$ thì:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

3. Tích phân truy hồi

Dạng 1. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \ (n \in \mathbb{N})$

Đặt: $\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \Rightarrow u' = (n-1).\sin^{n-2} x.\cos x \\ v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_n = -\sin^{n-1} x.\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)(I_{n-2} - I_n) \qquad (1)$$

Dạng 2. $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \ (n \in \mathbb{N})$

Đặt: $\begin{cases} u = \cos^{n-1} x \Rightarrow u' = -(n-1).\cos^{n-2} x.\sin x \\ v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$

$$\Rightarrow J_n = \cos^{n-1} x.\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)(J_{n-2} - J_n) \qquad (2)$$

Dạng 3. $I_n = \int_0^1 x^n.e^x dx \quad (n \in \mathbb{N})$

Đặt: $\begin{cases} u = x^n \Rightarrow u' = n.x^{n-1} \\ v' = e^x \Rightarrow v = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow I_n = x^n.e^x \Big|_0^1 - n.I_{n-1} \qquad (3)$

Dạng 4. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$

Phân tích: $\tan^{n+2} x = \tan^n x.\tan^2 x = \tan^n x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)$

Suy ra: $I_{n+2} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Dạng 5. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx$ và $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x^n \Rightarrow u' = nx^{n-1} \\ v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$

$\Rightarrow I_n = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^n - nJ_{n-1} \qquad (1)$

Tương tự: $J_n = 0 + nI_{n-1} \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow I_n + n(n-1)I_{n-2} = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^n$

Dạng 6. $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{e^x} dx$ hay $I_n = \int_0^1 x^n.e^{-x} dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x^n \Rightarrow u' = n.x^{n-1} \\ v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$

$\Rightarrow I_n = -x^n.e^{-x} \Big|_0^1 + n.I_{n-1}$

Dạng 7. $I_n = \int_1^e \ln^n x dx$ (n là số nguyên dương)

Đặt: $\begin{cases} u = \ln^n x \Rightarrow u' = n.\ln^{n-1} x.\dfrac{1}{x} \\ v' = 1 \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_n = x.\ln^n x\Big|_1^e - n.I_{n-1} \Leftrightarrow I_n = e - nI_{n-1}.$$

4. Tìm giới hạn trong phép tính tích phân

Bài toán tìm giới hạn trong phép tính tích phân thường xuất hiện dưới hai dạng:

Dạng 1: Tìm $\lim \int_0^t f(x)dx$ với t là tham số thực và $t > a$

Đây là bài toán tích phân mở rộng (một cận ở vô cực) – Đối với chương trình Trung học phổ thông ta chỉ việc tính $\int_0^t f(x)dx$ phụ thuộc theo t và dùng các định lí về giới hạn để tìm đáp số.

Dạng 2: Tìm $\lim \int_a^b f(x,n)dx$ trong đó hàm f còn phụ thuộc vào số tự nhiên n và ta thường đặt: $I_n = \int_a^b f(x,n)dx$ và ta được một dãy (I_n) gọi là dãy tích phân, nếu dãy (I_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ thì dãy (I_n) gọi là hội tụ, trường hợp ngược lại gọi là phân kỳ.

Bài toán thường chỉ yêu cầu tìm $\lim\limits_{x\to\infty}(I_n)$ nhờ dùng các định lí về giới hạn sau để tìm kết quả:

- Dãy (I_n) tăng và bị chặn trên thì hội tụ
- Dãy (I_n) giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

B. CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH

DẠNG 1. TOÁN CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Phương pháp

- Dựa vào sự liên hệ giữa các cận tương ứng của các tích phân trong hai vế để đổi biến số.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a\ ;\ b]$ và thỏa: $f(a + b - x) = f(x)$, $\forall x \in [a;b]$.

Chứng minh: $\int_a^b xf(x)dx = \dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

Giải

Đặt $u = a+b-x \Leftrightarrow x = a+b-u \Rightarrow dx = -du$

Khi $x = a \Rightarrow u = b$; $x = b \Rightarrow u = a$

Ta có: $\int_a^b xf(x)dx = \int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)(-du) = -\int_b^a (a+b-u)f(u)du$

$$= \int_a^b (a+b-u)f(u)du$$

$$= (a+b)\int_a^b f(u)du - \int_a^b uf(u)du$$

$\Leftrightarrow \int_a^b xf(x)dx = (a+b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx$

Vậy $\int_a^b xf(x)dx = \dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

Ví dụ 2. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{\sin x}dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$. Chứng minh rằng:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx \text{ và } I = \frac{\pi}{4}.$$

(Đại học Giao thông – 1996)

Giải

Đặt $x = \dfrac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{\sin x}dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \dfrac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-dt)}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos t}dt}{\sqrt{\cos t}+\sqrt{\sin t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}dx}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}$$

Vậy: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{\sin x}dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{\cos x}dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$

Do đó: $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{\sin x}dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{\cos x}dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$= x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Vậy: $I = \frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng: $\int_{\frac{1}{e}}^{\tan a} \frac{xdx}{1+x^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot a} \frac{dx}{x(1+x^2)} = 1$ $(\tan a > 0)$

(Đại học Luật Hà Nội – 1999)

Giải

Ta cần chứng minh: $\int_{\frac{1}{e}}^{\tan a} \frac{xdx}{1+x^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot a} \frac{dx}{x(1+x^2)} = 1$ (1)

Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = -t^2 dx$. Khi $\begin{cases} x = \cot a \Rightarrow t = \frac{1}{\cot a} = \tan a \\ x = \frac{1}{e} \Rightarrow t = e \end{cases}$

Do đó: $\int_{\frac{1}{e}}^{\cot a} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int_e^{\tan a} \frac{-\left(\frac{dt}{t^2}\right)}{\frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)} = \int_{\tan a}^{e} \frac{t.t^2\left(\frac{dt}{t^2}\right)}{(1+t^2)} = \int_{\tan a}^{e} \frac{tdt}{1+t^2} = \int_{\tan a}^{e} \frac{xdx}{1+x^2}$

Từ (1) suy ra: $\int_{\frac{1}{e}}^{\tan a} \frac{xdx}{1+x^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot a} \frac{dx}{x(1+x^2)}$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^{\tan a} \frac{xdx}{1+x^2} + \int_{\tan a}^{e} \frac{xdx}{1+x^2} = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} =$$

DẠNG 2. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Phương pháp

• Muốn chứng minh một bất đẳng thức xảy ra giữa hai tích phân, trước hết ta cần xét xem giữa hai tích phân đó đã có cận giống nhau hay chưa?
- Nếu giữa hai tích phân trên đã có cận giống nhau rồi thì ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức xảy ra giữa hai hàm dưới dấu tích phân rồi áp dụng tính chất bất đẳng thức tích phân.
- Nếu hai tích phân trên không có cận giống nhau thì ta đổi biến số, tìm cách làm cho các cận giống nhau rồi sau đó chứng minh bất đẳng thức xảy ra giữa hai hàm dưới dấu tích phân.

• Trong trường hợp gặp một bài toán ước lượng tích phân hay chứng minh một tích phân bị chặn, ta chỉ cần khảo sát hàm dưới dấu tích phân, xét xem tính bị chặn của hai hàm này rồi sau đó áp dụng tính chất bất đẳng thức tích phân.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục, xác định trên đoạn $[a\ ;\ b]$ thì ta có: $\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx$

(Học viện Quân y – Hà Nội – 1995)

Giải

Với mọi $t \in \mathbb{R}$ ta luôn viết được.

$[tf(x)+g(x)]^2 \ge 0 \Leftrightarrow t^2 f^2(x)+2tf(x)g(x)+g^2(x) \ge 0$

Từ đó ta lấy tích phân trên đoạn $[a\ ;\ b]$

$$t^2\int_a^b f^2(x)dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \ge 0$$

Xem vế phải là một tam thức bậc 2 theo t thì ta phải có $\Delta' \le 0$ cho ta:

$$\Delta' = \left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 - \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx \le 0$$

Vậy: $\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{1}{2}$

(Đại học Nông nghiệp I – 1993)

Giải

Ta xét hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ với $x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Ta tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Tính đạo hàm $f'(x)$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{(\sin x)'x-\sin x(x')}{x^2}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

Xét hàm số $\varphi(x)=x\cos x-\sin x$ có đạo hàm

$\varphi'(x)=x(-\sin x)+\cos x-\cos x=-x\sin x$

Với $\forall x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$ thì $\varphi'(x)$ luôn luôn có giá trị âm, nên $\varphi'(x)$ giảm trên $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$, do đó hàm số $f'(x)<0$ và hàm số $f(x)$ là hàm nghịch biến.

Vậy giá trị lớn nhất của $f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{6}}{\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{3}{\pi}$.

Và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

Ta có: $\forall x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$ thì $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}\le\dfrac{\sin x}{x}\le\dfrac{3}{\pi}$.

Do đó: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}dx\le\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}dx\le\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3}{\pi}dx$

$\Leftrightarrow \displaystyle\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\le\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{3}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\ \Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{3}}{4}\le\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{1}{2}$

Phá dấu bằng: Lấy $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ thì $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}<\dfrac{\sin x_0}{x_0}<\dfrac{3}{\pi}$

Do đó: $\displaystyle\frac{\sqrt{3}}{4}<\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{1}{2}\Rightarrow$ (đpcm).

DẠNG 3. TÍCH PHÂN TRUY HỒI

Phương pháp

- Thiết lập mối quan hệ giữa I_n và I_{n-1} (hoặc I_{n-2}).
- Vận dụng công thức liên hệ nhiều lần, lui dần từ I_n cho đến I_0 (hoặc I_1) để tính được I_n.

Ví dụ 1. Tính: $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ $(n = 1, 2, ...)$

(Đại học Pháp lý TPHCM – 1992)

Giải

Đầu tiên, đổi biến số, đặt: $\begin{cases} x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Do đó: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^n \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt$

Áp dụng công thức tích phân từng phần, đặt:

$\begin{cases} u = \cos^{2n} t \\ dv = \cos t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2n\cos^{2n-1} t \sin t dt \\ v = \sin t \end{cases}$

Do đó: $I_n = \cos^{2n} \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} t.\sin^2 t dt = 0 + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} t(1-\cos^2 t)dt$

$= 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2n-1} t - \cos^{2n+1} t)dt$

$\Rightarrow I_n = 2n(I_{n-1} - I_n) \Rightarrow I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ (1)

Công thức qui nạp (1) cho ta: $I_n = \dfrac{2n}{2n+1}.\dfrac{2n-2}{2n-1}.....\dfrac{2}{3}.I_0$

Với $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x^2)^0 dx = \int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1.$

Vậy: $I_n = \dfrac{2n}{2n+1}.\dfrac{2n-2}{2n-1}......\dfrac{2}{3}.$

Ví dụ 2. Với mỗi số nguyên tự nhiên, xét: $I_n = \int_0^{\pi} \dfrac{\cos nx dx}{5-4\cos x}.$

Chứng minh: $I_n = \frac{5}{2}I_{n-1} - I_{n-2}$ $(\forall n \geq 3)$.

(Đại học Kinh tế TP.HCM – 1986)

Giải

Với n ta có: $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos nx dx}{5-4\cos x}$

Ta có: $I_{n-2} = \int_0^{\pi} \frac{\cos(n-2)x dx}{5-4\cos x}$.

Suy ra $I_n + I_{n-2} = \int_0^{\pi} \frac{\cos nx dx}{5-4\cos x} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(n-2)x dx}{5-4\cos x} = \int_0^{\pi} \frac{\cos nx + \cos(n-2)x}{5-4\cos x} dx$

Biết $\cos nx + \cos(n-2)x = 2\cos\frac{nx+(n-2)x}{2}\cos\frac{nx-(n-2)x}{2} = 2\cos(n-1)x\cos x$

nên $I_n + I_{n-2} = \int_0^{\pi} \frac{2.\cos(n-1)x\cos x}{5-4\cos x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)x\left[\frac{5}{2} - \frac{1}{2}(5-4\cos x)\right] dx}{5-4\cos x}$

$$= \frac{5}{2}\int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)x dx}{5-4\cos x} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(n-1)x dx$$

$$= \frac{5}{2}I_{n-1} - \frac{1}{2(n-1)}\sin(n-1)x\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{5}{2}I_{n-1} - \frac{1}{2(n-1)}[\sin(n-1)\pi - \sin(n-1)0]$$

$\Rightarrow I_n + I_{n-2} = \frac{5}{2}I_{n-1} - 0 \Rightarrow I_n = \frac{5}{2}I_{n-1} - I_{n-2}$ $(\forall n \geq 3) \Rightarrow$ (đpcm).

Ví dụ 3. Tính tích phân $\int_0^{\pi} \cos^n x \cos(nx) dx$ (n là số nguyên dương)

(Đại học Nông – Lâm TP.HCM – 1995, khối A)

Giải

Ta có: $I = \int_0^{\pi} \cos^n x \cos(nx) dx$

Đặt $u = \cos^n x \Rightarrow du = -n\cos^{n-1} x \sin x dx$; $dv = \cos(nx)dx \Rightarrow v = \frac{1}{n}\sin(nx)$

$\Rightarrow I_n = uv\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} v du = \left[\frac{1}{n}\cos^n x \sin nx\right]\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin x dx$

$$= 0 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^{n-1} x[\cos(n-1)x - \cos(n+1)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\cos(n-1)x - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x(\cos nx\cos x - \sin nx\sin x)dx$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{1}{2}I_{n-1} - \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}I_n \Leftrightarrow I_n = \frac{1}{2}I_{n-1}.$$

Từ đó suy ra: $I_n = \frac{1}{2}I_{n-1} = \frac{1}{4}I_{n-2} = ... = \frac{1}{2^{n-1}}I_1$ (1)

Ta có: $I_1 = \int_0^{\pi}\cos x\cos xdx = \int_0^{\pi}\cos^2 xdx = \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2xdx$

$$= \frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{4}(\sin 2\pi - \sin 0)$$

$\Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{2}$ (2)

Thế I_1 ở (2) vào (1) ta được: $I = \frac{1}{2^{n-1}}I_1 = \frac{1}{2^{n-1}}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^n}$

DẠNG 4. TÌM GIỚI HẠN TRONG PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Phương pháp

* Trường hợp 1: Tính tích phân đã cho sau đó dựa vào kết quả tìm được để lấy giới hạn.
* Trường hợp 2: Nếu không tính được tích phân đã cho ta dùng nguyên lý "kẹp" sau:

Cho dãy số (a_n), (b_n) và (c_n) thỏa : $\begin{cases} c_n \le a_n \le b_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L \end{cases}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Ví dụ 1. Tính giới hạn: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sin(\pi x)dx \quad (n\in\mathbb{N})$.

(Đại học Ngoại thương – 1995, khối A và D)

Giải

Ta có: $\forall x \in [0\ ;\ 1]$ nên $0 \le x^n.\sin\pi x \le x^n$.

Suy ra: $0 \le \int_0^1 x^n\sin(\pi x)dx \le \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow 0 \le I_n \le \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]\Big|_0^1 \Rightarrow 0 \le I_n \le \frac{1}{1+n}$

Biết $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n}\right) = 0$.

Do đó: $I_n \le \frac{1}{1+n}$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} I_n \le \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n}\right)$.

Vậy: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$.

Ví dụ 2. a) Cho $I_n = \int_0^1 x^n \sin x dx \quad (n \in \mathbb{N})$. Chứng minh: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

(Đại học Ngân hàng TPHCM – 1992)

b) Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = 0$.

(Đại học Kinh tế TPHCM – 1993)

Giải

a) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$

Ta có: $\begin{cases} 0 \le x^n \le 1 & \text{với } \forall x \in [0\ ;\ 1],\ n \in \mathbb{N} \\ 0 \le \sin x \le 1 & \text{với } \forall x \in [0\ ;\ 1] \end{cases}$

$\Rightarrow 0 \le x^n \sin x \le x^n$ với $\forall x \in [0\ ;\ 1],\ n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \int_0^1 0dx \le \int_0^1 x^n \sin x dx \le \int_0^1 x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 \Rightarrow 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1} \quad (1)$$

mà $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ (2)

Từ (1) và (2) cho ta $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

b) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = 0$

Ta có: $\forall x \in [0\ ;\ 1]$ thì $0 \le \frac{x^n}{1+x} \le x^n$

$$\Rightarrow \int_0^1 0dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \le \int_0^1 x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Mà $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = 0$.

C. TOÁN TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho f(x) là hàm số liên tục trên đoạn [0 ; 1]. Chứng minh rằng:

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

(Đại học Luật TP.HCM – 1995, khối A)

Bài 2. Cho tích phân $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^n x dx$ (n là số nguyên, dương bất kì)

a) Tính I_n khi $n = 2$.

b) Chứng minh rằng: $I_n > \frac{1}{n+2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2}$.

(Đại học Bách khoa Hà Nội – 1997)

D. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0 ; 1]$ nên $f(\sin x)$ liên tục trên $[0 ; \pi]$, do đó hàm số $xf(\sin x)$ cũng liên tục trên $[0 ; \pi]$.

Ta có: $I = \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$.

Đặt $t = \pi - x \Rightarrow dt = -dx$. Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \pi \\ x = \pi \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

Do đó:

$$I = \int_{\pi}^{0}(\pi - t)f[\sin(\pi - t](-dt) = -\int_{\pi}^{0}(\pi - t)f(\sin t)dt = \int_0^{\pi}\pi f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt$$

$$I = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - I$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

Vậy $I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

Bài 2. a) Tính

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan^2 x + 1 - 1)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan^2 x + 1)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx$$

$$= A - \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = A - \frac{\pi^2}{32}$$

Tính $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan^2 x + 1)dx$.

Áp dụng công thức tích phân từng phần, đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = (\tan^2 x + 1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

Do đó: $A = x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan xdx = \frac{\pi}{4} + \ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $I_2 = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32}$.

b) Chứng minh $I_n > \frac{1}{n+2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2}$

Ta biết với $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ thì $\tan x \geq x \Rightarrow \tan^n x \geq x^n$.

Do đó: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^n x dx > \int_0^{\frac{\pi}{4}} x.x^n dx = \left.\frac{x^{n+2}}{n+2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+2}.\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2}$.

Vậy: $I_n > \frac{1}{n+2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2}$.

TOÁN TỰ LUẬN ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Khái niệm tích phân.
- Các tính chất của tích phân
- Các phương pháp tính tích phân
- Đẳng thức, bất đẳng thức tích phân, tích phân truy hồi, tìm giới hạn trong phép tính tích phân.

B. BÀI TẬP.

Bài 1. Tính: $I = \int_0^1 \sqrt{4x^2 - 4x + 1}dx$.

(Đại học Dân lập Hồng Đức – 1998)

Giải

Ta có thể viết:

$$I = \int_0^1 \sqrt{4x^2 - 4x + 1}dx = \int_0^1 \sqrt{(2x-1)^2}dx = \int_0^1 |2x-1|dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |2x-1|dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |2x-1|dx$$

Bảng xét dấu:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
2x – 1	▒	–	0	+	▒

Do đó: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)dx = \left.(x - x^2)\right|_0^{\frac{1}{2}} + \left.(x^2 - x)\right|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2}$.

Bài 2. a) Tính: $I = \int_0^1 x\,|x - \frac{1}{2}|\,dx$.

(Đại học Dân lập Phương Đông – 1996)

b) Tính: $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$.

(Đại học Thủy lợi – Hà Nội – 1997)

Giải

a) Tính $I = \int_0^1 x\,|x - \frac{1}{2}|\,dx$.

Ta có thể viết: $I = \int_0^1 x\,|x - \frac{1}{2}|\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x\left(\frac{1}{2} - x\right)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\left(x - \frac{1}{2}\right)dx$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{2} - x^2\right)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{8}.$$

b) Tính $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$

Ta có thể viết: $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx = \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2 x}\,dx$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx = \sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[|\sin x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - |\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right] = 2\sqrt{2}$$

Bài 3. Tính tích phân: $I = \int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx$.

(Đại học Thủy lợi – 1997)

Giải

Cách 1. Đặt $x = 2\sin t$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = 2\cos t\,dt$

Suy ra: $x^2 = 4\sin^2 t$ và $4 - x^2 = 4(1 - \sin^2 t) = 2\cos t$

Khi $\left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$

Ta có: $I = \int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t.2\cos t.(2\cos tdt)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^2 t\cos^2 tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16.\frac{1}{4}\sin^2 2tdt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4.\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1-\cos 4t)dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4tdt$$

$$= 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\left(\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin 0^0)$$

$\Rightarrow I = \pi$.

Cách 2. Có thể đặt $x = 2\cos t$ $\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$

Suy ra: $x^2 = 4\cos^2 t$ và $4 - x^2 = 4 - 4\cos^2 t = 2\sin t$ và $dx = -2\sin tdt$

Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \\ x = 2 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

Ta có: $I = \int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 4\cos^2 t.2\sin t.(-2\sin tdt)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^2 t\cos^2 tdt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2tdt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)dt \Rightarrow I = \pi$$

Bài 4. a) Tính: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 xdx$.

(Đại học Bách khoa TP.Hồ Chí Minh – Khối A – 1995)

b) Tính: $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$.

(Đại học Huế – 1998)

Giải

a) Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx$

Ta có thể viết: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{1+\cos 2x}{2}dx \Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2xdx$

$\Rightarrow 2I = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + A = \frac{\pi^2}{8} + A$

Tính $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2xdx$ bằng công thức tích phân từng phần, đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

Do đó: $A = \left.\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{2}dx = 0 - \frac{1}{2}\left.\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$

Vậy: $2I = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$.

b) Tính $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$

Áp dụng công thức tích phân từng phần, đặt

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \int\frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

Do đó:

$$I = -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2 + \int_1^2\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{x}\Big|_1^2 = \left(-\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{1}\ln 1\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}$$

Vậy $I = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$.

Bài 5. Đặt $J(t) = \int_1^t \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ với $t > 1$. Tính $J(t)$ theo t, từ đó suy ra rằng: $J(t) < 2, \forall t > 1$.

(Đại học Quốc gia TPHCM – 1996)

Giải

Tính $J(t)$ theo t

Ta có $J(t) = \int_1^t \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ với $t > 1$

Áp dụng công thức tích phân từng phần, đặt

$$\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = \frac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\frac{1}{x}\ln x dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

Do đó: $J(t) = -\frac{1}{x}\ln^2 x\Big|_1^t + 2\int_1^t \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{x^2}\ln^2 x\Big|_1^t + 2\left(-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^t$

$$= -\frac{1}{t}\ln^2 t - \frac{2}{t}\ln t - \frac{2}{t} + 2 \;\; = -\frac{1}{t}[\ln t + 1]^2 - \frac{1}{t} + 2$$

Vậy: $J(t) = 2 - \frac{1}{t}[(\ln t + 1)^2 + 1]$.

Suy ra $J(t) < 2$ khi $t > 1$.

C. TOÁN TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính: $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$.

(Đại học Quốc gia Hà Nội – 1998)

Bài 2. Tính: $I = \int_1^2 x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$.

(Đại học Cần Thơ – Khối D – 1997)

Bài 3. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $f(x) = \ln\frac{1}{(3-x)^3}$ và giải bất phương

trình: $$f'(x) > \frac{6}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2\frac{t}{2}dt}{x+2}$$

(Đại học Bách khoa TP.HCM – 1996)

D. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$

Ta viết: $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x(e^x + 1)}$

Đổi biến số, đặt: $t = e^x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = e^x dx \\ x = 0 \Rightarrow t = e^0 + 1 = 2 \\ x = 1 \Rightarrow t = e^1 + 1 = e + 1 \end{cases}$

Do đó:

$$I = \int_2^{e+1} \frac{dt}{(t-1)t} = \int_2^{e+1} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \left[\ln|t-1| - \ln|t| \right] \Big|_2^{e+1} = [\ln e - \ln(e+1)] - [\ln 1 - \ln 2]$$

$$= \ln e - \ln(e+1) - 0 + \ln 2 = \ln 2e - \ln(e+1) = \ln \frac{2e}{e+1}.$$

Bài 2. Áp dụng công thức tích phân từng phần bằng cách đặt:

$$\begin{cases} u = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} dx = \dfrac{-1}{x\left(x + \frac{1}{x}\right)} dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

Do đó: $I = \frac{x^3}{3} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \Big|_1^2 + \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{8}{3} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \int_1^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx$

$$= \frac{8}{3} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right) \Bigg|_1^2$$

$$= \frac{8}{3} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \left(\ln 3 + \frac{1}{2} - \ln 2 \right)$$

Vậy: $I = 3\ln 3 - \frac{10}{3} \ln 2 + \frac{1}{6}$.

Bài 3. Ta có: $f(x) = \ln \frac{1}{(3-x)^3} = -3\ln(3-x)$

Điều kiện $x < 3$

Đạo hàm $f'(x) = \frac{3}{3-x}$ $(x < 3)$

Do đó: $f'(x) = \frac{3}{3-x} > \frac{6}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{t}{2} dt}{x+2}$ (1)

Tính: $\frac{6}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{t}{2} dt}{x+2} = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{x+2} \int_0^{\pi} \frac{(1 - \cos t)}{2} dt = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{1}{x+2} (t - \sin t) \Big|_0^{\pi}$

$$= \frac{3}{\pi(x+2)}[(\pi - \sin\pi) - (0 - \sin 0)] = \frac{3}{x+2}$$

Từ (1) ta suy ra: $\frac{3}{3-x} > \frac{3}{x+2}$.

Giải ra, ta được: $x < -2$ và $\frac{1}{2} < x < 3$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Giải phương trình $\int_0^x \left(4\sin^3\frac{t}{3} - 3\sin\frac{t}{3}\right)dt = -\frac{1}{2}$ (x là ẩn số và $0 < x < \pi$).

Ta có nghiệm:

(A) $x = \frac{\pi}{6}$; **(B)** $x = \frac{\pi}{4}$; **(C)** $x = \frac{\pi}{3}$; **(D)** $x = \frac{\pi}{2}$.

2. Tính $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{4x^2}\,dx$, ta được:

(A) $I = 2$; **(B)** $I = \frac{3}{2}$; **(C)** $I = 3$; **(D)** $I = -3$.

3. Cho $A = \int_0^{\ln\alpha} \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$ ($\alpha > 1$) và $B = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. Câu nào sau đây đúng ?

(A) $A = 2B$; **(B)** $B = 2A$; **(C)** $A = B$; **(D)** $A = \frac{B}{\alpha}$.

4. Tính m để $\int_0^3 (x^2 + m)dx = 15$, ta được:

(A) $m = 1$; **(B)** $m = -1$; **(C)** $m = -2$; **(D)** $m = 2$.

5. Tính $A = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos x}\,dx$, ta được:

(A) $A = \sqrt{2}$; **(B)** $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **(C)** $A = 2\sqrt{2}$; **(D)** $A = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$.

6. Tính $I = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x} - x\right)dx$, ta được:

(A) $I = \frac{11}{6}$; **(B)** $I = -\frac{11}{6}$; **(C)** $I = \frac{10}{3}$; **(D)** $I = -\frac{10}{3}$.

7. Biết $\int x\cos x dx = x\sin x + \cos x + C$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi^2}{16}} \cos\sqrt{4x}dx$, ta được:

(A) $I = \frac{\pi - 2}{2}$; **(B)** $I = \frac{\pi + 2}{2}$; **(C)** $I = \frac{\pi - 2}{4}$;**(D)** $I = \frac{\pi + 2}{4}$.

8. Tính $A = \int_1^2 (4x^3 - 6x^2).\ln x dx$, ta được:

(A) $A = \frac{12}{11}$; **(B)** $A = \frac{11}{12}$; **(C)** $A = \frac{5}{6}$; **(D)** $A = \frac{6}{5}$.

9. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin x dx$, ta được:

(A) $I = \frac{\pi}{2} - 1$; **(B)** $I = \frac{\pi}{2} + 1$; **(C)** $I = 1$; **(D)** $I = 1 - \frac{\pi}{2}$.

10. Tính $J = \int_1^2 x.e^{x-1}dx$, ta được:

(A) $J = e$; **(B)** $J = 2e$; **(C)** $J = e^2$; **(D)** $J = 2e^2$.

11. Cho $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 2\sin^2\frac{x}{2}}.\sin x dx$. Bằng cách đặt $t = \sqrt{\cos x}$ thì tích phân A trở thành

(A) $A = \int_0^1 t^2 dt$; **(B)** $A = 2\int_0^1 t^2 dt$;

(C) $A = \int_0^1 t dt$; **(D)** $A = 2\int_0^1 t dt$.

12. Tính $I = \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}dx$, ta được:

(A) $I = 2\sqrt{2}$; **(B)** $I = 2(\sqrt{2} - 1)$;

(C) $I = 2\sqrt{2} - 1$; **(D)** Đáp số khác.

13. $\int_{10}^{12} \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}dx$ bằng:

(A) $\ln\frac{108}{15}$; **(B)** ln77 – ln54 ; **(C)** ln58 – ln42 ; **(D)** $\ln\frac{155}{12}$.

14. Cho $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2 - 1}dx$. Khẳng định nào sau đây sai ?

(A) $I = \int_0^3 \sqrt{u}du$; (B) $I = \frac{2}{3}\sqrt{27}$;

(C) $I = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3$; (D) $I \geq 3\sqrt{3}$.

15. Tính $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}dx$, ta được:

(A) $I = \frac{1}{5}$; (B) $I = -\frac{1}{5}$; (C) $I = \frac{1}{4}$; (D) $I = -\frac{1}{3}$.

16. Cho $A = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x + 3}}{x}dx$; $B = \int_0^2 xdx$; $C = \int_{\sqrt{3}}^2 x^2dx$. Câu nào sau đây đúng ?

(A) $A = 2B$; (B) $A = 2C$; (C) $A = B$; (D) $A = C$.

17. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(4\tan^2 x - 4\tan x + 1)^2}{\cos^2 x}dx$ bằng:

(A) $\frac{1}{5}$; (B) $\frac{2}{3}$; (C) $\frac{4}{5}$; (D) $\frac{1}{3}$.

18. $\int_0^1 \frac{x^{11}}{x^6+1}dx$ bằng:

(A) $\frac{1}{4}(\ln 2 - 1)$; (B) $\frac{1}{5}\left(\ln 3 - \frac{2}{3}\right)$;

(C) $\frac{1}{6}(1 - \ln 2)$; (D) $\frac{1}{3}\left(\ln 3 - \frac{1}{3}\right)$.

19. Bằng cách đặt $t = \sqrt[3]{x+1}$, hãy biến đổi: $I = \int_0^7 \sqrt[3]{x+1}(x+2)dx = \int_a^b f(t)dt$

(A) $I = \int_1^2 (t^4 + t^2)dt$; (B) $I = \int_1^2 (t^5 + t^3)dt$;

(C) $I = 3\int_1^2 (t^5 + t^3)dt$; (D) $I = 3\int_1^2 (t^6 + t^3)dt$.

20. Tính $I = \int_0^{\ln 2} e^x\sqrt{e^x - 1}dx$

(A) $I = \frac{2}{3}$; (B) $I = \frac{1}{3}$; (C) $I = \frac{1}{2}$; (D) $I = 1$.

B. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	**(C)**	**(A)**	**(C)**	**(D)**	**(C)**	**(B)**	**(C)**	**(B)**	**(C)**	**(A)**

Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	**(B)**	**(B)**	**(B)**	**(D)**	**(B)**	**(B)**	**(A)**	**(C)**	**(D)**	**(A)**

C. HƯỚNG DẪN CHỌN ĐÁP ÁN

1. $\int_0^x\left(4\sin^3\frac{t}{3}-3\sin\frac{t}{3}\right)dt=-\int_0^x \sin t dt=\cos t\Big|_0^x=\cos x-1=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ vì $x\in(0;\pi)$. Chọn **(C)**.

2. $I=\int_{-1}^{1}|2x|dx=-\int_{-1}^{0}2xdx+\int_0^1 2xdx=-x^2\Big|_{-1}^{0}+x^2\Big|_0^1=2$. Chọn **(A)**.

3. $A=\int_0^{\ln\alpha}(e^x-e^{-x})dx=(e^x+e^{-x})\Big|_0^{\ln\alpha}=e^{\ln\alpha}+\frac{1}{e^{\ln\alpha}}-(e^0+e^0)=\alpha+\frac{1}{\alpha}-2$

$=\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{\alpha}=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}=B$. Chọn **(C)**.

4. $\int_0^3(x^2-m)dx=\left(\frac{x^3}{3}+mx\right)\Big|_0^3=9+3m=15\Leftrightarrow m=2$. Chọn **(D)**.

5. $A=\int_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|dx=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}dx=-2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}=2\sqrt{2}$.

Chọn **(C)**.

6. $I=\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-x^2\right)dx=-\left(\frac{1}{x}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2=-\frac{11}{6}$. Chọn **(B)**.

7. Đặt $t=\sqrt{4x}\Rightarrow\begin{cases}\bullet\ t^2=4x\Rightarrow 2tdt=4dx\\ \bullet\ x=0\Rightarrow t=0\ ;\ x=\frac{\pi^2}{16}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

* Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t.\frac{1}{2}tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos tdt=\frac{1}{2}[t\sin t+\cos t]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-2}{4}$. Chọn **(C)**.

8. $u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x}$; $dv=(4x^3-6x^2)dx\Rightarrow v=x^4-2x^3$

* Vậy $A=(x^4-2x^3).\ln x\Big|_1^2-\int_1^2(x^3-2x^2)dx=-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_1^2=\frac{11}{12}$. Chọn **(B)**.

9. $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$

* Vậy $I = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Chọn **(C)**.

10. $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = e^{x-1}dx \Rightarrow v = e^{x-1}$

* Vậy $J = xe^{x-1}\Big|_1^2 - \int_1^2 e^{x-1}dx = (2e-1) - e^{x-1}\Big|_1^2 = e$. Chọn **(A)**.

11. $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}.\sin x dx$ (vì $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$)

Đặt $t = \sqrt{\cos x}$ $(t \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ t^2 = \cos x \Rightarrow 2tdt = -\sin x dx \\ \bullet\ x = 0 \Rightarrow t = 1 ; x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

* Vậy $A = \int_1^0 t.(-2tdt) = 2\int_0^1 t^2 dt$. Chọn **(B)**.

12. Đặt $t = \sqrt{1+\ln x} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ t^2 = 1 + \ln x \Rightarrow 2tdt = \dfrac{dx}{x} \\ \bullet\ x = 1 \Rightarrow t = 1 ; x = e \Rightarrow t = \sqrt{2} \end{cases}$

* Vậy $I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t}.2t.dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} dt = 2(\sqrt{2}-1)$. Chọn **(B)**.

13. $I = \int_{10}^{12} \frac{2x+1}{x^2+x-2}dx$

Đặt $t = x^2 + x - 2$, ta có
- $dt = (2x+1)dx$
-

x	10	12
t	108	154

Vậy $I = \int_{108}^{154} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_{108}^{154} = \ln 154 - \ln 108 = (\ln 2 + \ln 77) - (\ln 2 + \ln 54) =$ $\ln 77 - \ln 54$. Chọn **(B)**.

14. $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$

* Đặt $u = x^2 - 1$, ta có
- $du = 2xdx$
-

x	1	2
u	0	3

• Vậy $I = \int_0^3 \sqrt{u}du$ (Câu (**A**) đúng)

$$\Rightarrow I = \int_0^3 u^{\frac{1}{2}}du = \left.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^3 = \left.\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\right|_0^3 = \left.\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right|_0^3 = \frac{2}{3}\sqrt{27}$$ (Câu (**B**) và (**C**) đúng)

• $I = \frac{2}{3}\sqrt{27} = 2\sqrt{3} < 3\sqrt{3} \Rightarrow$ Câu (**D**) sai. Chọn (**D**).

15. Đặt $t = \sqrt[4]{x}$ $(t \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ t^4 = x \Rightarrow dx = 4t^3dt \\ \bullet\ \sqrt{x} = t^2 \\ \bullet\ x = 0 \Rightarrow t = 0\ ;\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

* Vậy $I = \int_0^1 \left(\frac{t^2-1}{t+1}\right).4t^3dt = 4\int_0^1 (t^4 - t^3)dt = 4\left.\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4}\right)\right|_0^1 = -\frac{1}{5}$. Chọn (**B**).

16. Đặt $t = \sqrt{\ln x + 3} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ t^2 = \ln x + 3 \Rightarrow 2tdt = \frac{dx}{x} \\ \bullet\ x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{3}\ ;\ x = e \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

* Vậy $A = \int_{\sqrt{3}}^2 t.2t.dt = 2\int_{\sqrt{3}}^2 t^2dt = 2\int_{\sqrt{3}}^2 x^2dx = 2C$. Chọn (**B**).

17. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(4\tan^2 x - 4\tan x + 1)^2}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2\tan x - 1)^4}{\cos^2 x}dx$

Đặt $t = 2\tan x - 1$, ta có $\Rightarrow \begin{cases} dt = \frac{2}{\cos^2 x}dx \\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{\pi}{4} \\ \hline t & -1 & 1 \end{array} \end{cases}$

Vậy $I = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 t^4dt = \left.\frac{1}{10}t^5\right|_{-1}^1 = \frac{1}{10}(1+1) = \frac{1}{5}$. Chọn (**A**).

18. $I = \int_0^1 \frac{x^{11}}{x^6+1}dx = \int_0^1 \frac{x^6.x^5dx}{x^6+1}$

Đặt $t = x^6 + 1$, ta có $\begin{cases} \bullet\ dt = 6x^5dx \Rightarrow x^5dx = \frac{1}{6}dt \\ \bullet\ x^6 = t - 1 \\ \bullet\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array} \end{cases}$

Vậy $I = \int_1^2 \frac{(t-1).\frac{1}{6}dt}{t} = \frac{1}{6}\int_1^2 \left(1-\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{6}\left(t - \ln|t|\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{6}(1-\ln 2)$. Chọn **(C)**.

19. Đặt $t = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ t^3 = x+1 \Rightarrow 3t^2dt = dx \\ \bullet\ x = t^3 - 1 \\ \bullet\ x = 0 \Rightarrow t = 1\ ;\ x = 7 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

* Vậy $I = \int_1^2 t(t^3+1).3t^2dt = 3\int_1^2 (t^6+t^3)dt$. Chọn **(D)**.

20. Đặt $u = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ u^2 = e^x - 1 \Rightarrow 2udu = e^x dx \\ \bullet\ x = 0 \Rightarrow u = 0\ ;\ x = \ln 2 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$

Vậy $I = \int_0^1 u.2udu = 2\int_0^1 u^2du = \frac{2}{3}u^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$. Chọn **(A)** .

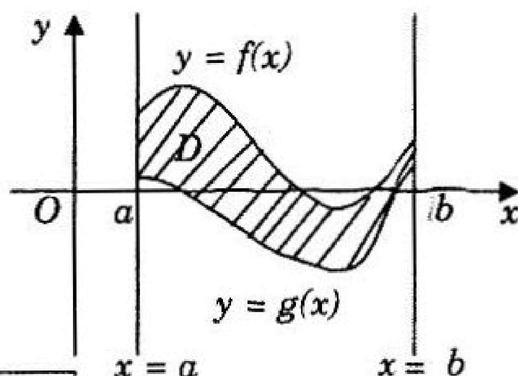
Chương III. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

§1. *Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng*

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (1)$$



• Để tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và hai đường thẳng $x = a$,

$x = b$, ta có công thức sau:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \qquad (2)$$

• Chú ý

Tương tự (bằng cách coi x là hàm của biến y), diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $x = g(y)$, $x = h(y)$ (g và h là hai hàm liên tục trên đoạn $[c ; d]$) và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ là

$$S = \int_c^d |g(y) - h(y)|\,dy \qquad (3)$$

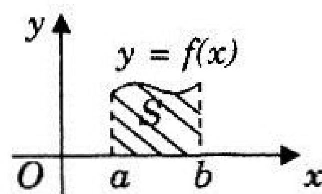
B. CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH

DẠNG 1. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG TỰA TRỤC Ox

Phương pháp

• Diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, ($f(x) \geq 0$) trên $[a ; b]$, trục Ox và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ (hình 1) là:

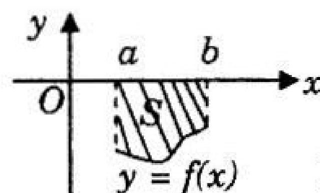
$$S = \int_a^b f(x)dx$$



Hình 1

• Nếu $f(x) \leq 0$ trên $[a ; b]$ thì diện tích hình thang cong (hình 2) là:

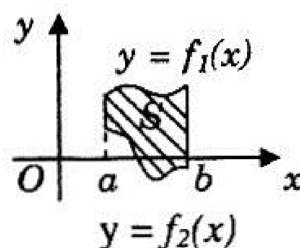
$$S = -\int_a^b f(x)dx$$



Hình 2

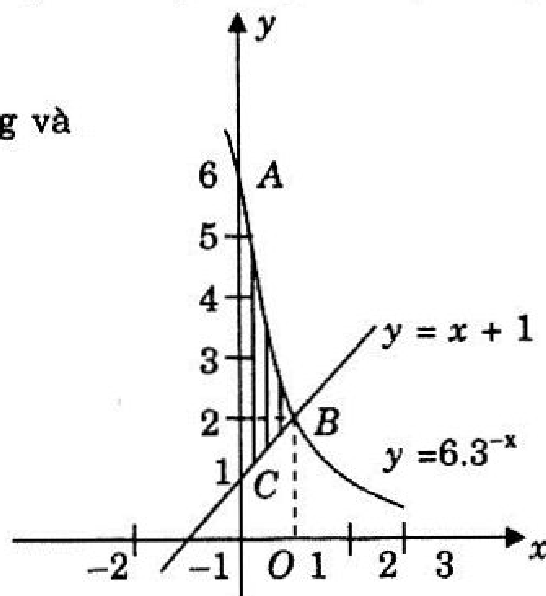
• Diện tích của hình giới hạn bởi hai đường cong $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ($f_2(x) \geq f_1(x)$) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (hình 3) là

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$$



$y = f_2(x)$
Hình 3

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục tung, đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = 6.3^{-x}$.



Giải

Ta tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng và đường cong.

Muốn vậy ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 6.3^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy $S = \int_0^1 6.3^{-x}dx - \int_0^1 (x+1)dx$

$$= -\frac{6}{\ln 3}.3^{-x}\Big|_0^1 - \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1$$

$= \dfrac{4}{\ln 3} - \dfrac{3}{2}$ (đvdt).

Ví dụ 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ và tiếp tuyến với đường cong có hoành độ $x = 2$.

(Học viện Quân y – 1997)

Giải

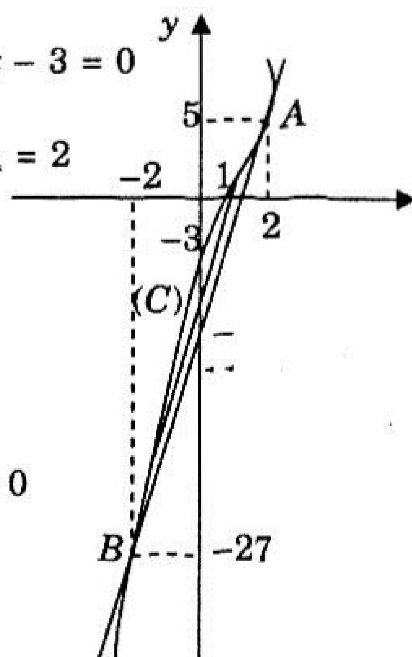
1) Vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 4x + 4$ có $\Delta' = 4 - 12 = -8 < 0 \Rightarrow y' > 0, \forall x$

Suy ra hàm số luôn luôn tăng

$y'' = 6x - 4 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow y = -\dfrac{25}{27}$

$\Rightarrow$ điểm uốn $I\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{25}{27}\right)$



Ngoài ra $x = 0 \Rightarrow y = -3$ và $y = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 + 4x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm A có: $x_A = 2$

$\Rightarrow y_A = 5$

là $y - y_A = y'(2)(x - x_A)$

$\Leftrightarrow y - 5 = 8(x - 2)$

$\Leftrightarrow 8x - y - 11 = 0$

Hoành độ giao điểm của (C) và tiếp tuyến là nghiệm phương trình

$x^3 - 2x^2 + 4x - 3 = 8x - 11 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2.(x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(2\,;5) \\ x = -2 \Rightarrow y = -27 \Rightarrow B(-2\,;-27) \end{array}\right.$

Vậy đồ thị (C) tiếp xúc tiếp tuyến tại A và cắt nhau tại B.

2) Gọi S là diện tích hình phẳng cần tìm:

Ta có: $\forall x \in [-2\,;2]$: $y_{(C)} \geq y_{tt}$

Do đó: $S = \displaystyle\int_{-2}^{2} (x^3 - 2x^2 + 4x - 3 - 8x + 11)dx$

$$S = \int_{-2}^{2} (x^3 - 2x^2 - 4x + 8)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

Vậy: $S = \dfrac{64}{3}$ (đvdt).

Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = \sin x$ và hai tiếp tuyến của đường cong vẽ tại hai điểm $x = 0$ và $x = \pi$.

Giải

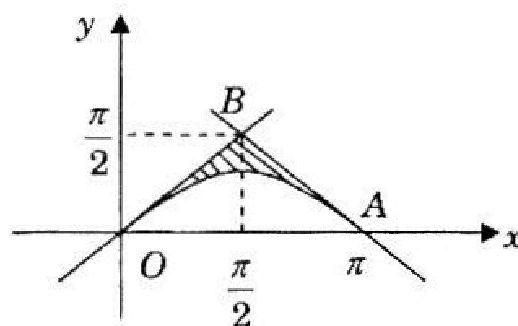
Ta tìm tọa độ giao của đường cong với các đường thẳng $x = 0$ và $x = \pi$.

$O(0\,;0)$, $A(\pi\,;0)$

Phương trình tiếp tuyến với đường cong tại hai điểm trên là:

- Tại điểm $x = 0$: $y = 1(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = 1(x - 0) + \sin 0 \Leftrightarrow y = x$
- Tại điểm $x = \pi$: $y = -1(x - \pi) + \sin\pi$ (do $y' = \cos x$) $\Leftrightarrow y = -x + \pi$

Ta tìm tọa độ của giao điểm hai đường thẳng trên:



$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ta có $B\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Ký hiệu diện tích hình phẳng phải tìm là S. Mặt khác, do tính đối xứng nên ta có: $S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x - \sin x)dx = 2\left(\dfrac{x^2}{2} + \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi^2}{4} - 2$.

Ví dụ 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

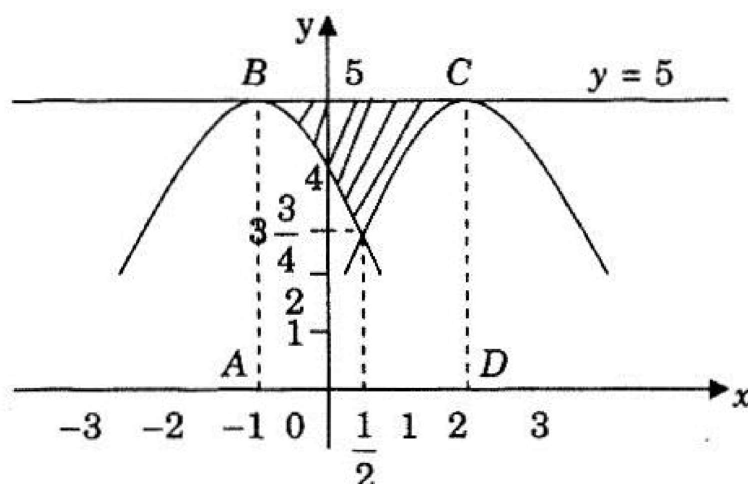
$$y = -x^2 - 2x + 4,\ y = -x^2 + 4x + 1,\ y = 5$$

Giải

Từ hình vẽ ta có

$$S = S_{ABCD} - \int_{-1}^{\frac{1}{2}}(-x^2 - 2x + 4)dx - \int_{\frac{1}{2}}^{2}(-x^2 + 4x + 1)dx$$

$$= 15 - \left(\frac{-x^3}{3} - x^2 + 4x\right)\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} - \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = 15 - 6\frac{3}{8} - 6\frac{3}{8} = 2\frac{1}{4} \text{ (đvdt)}$$



Ví dụ 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường có phương trình: $y = -\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{8x}{3} - \dfrac{7}{3}$ và $y = \dfrac{7 - x}{x - 3}$

(Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông TPHCM – 1998)

Giải

1) Vẽ đồ thị (P): $y = -\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{8x}{3} - \dfrac{7}{3}$ và (H): $y = \dfrac{7-x}{x-3}$

• Vẽ (P): $y = -\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{8x}{3} - \dfrac{7}{3} \Rightarrow y' = -\dfrac{2x}{3} + \dfrac{8}{3}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$ đỉnh parabol $(4 ; 3)$

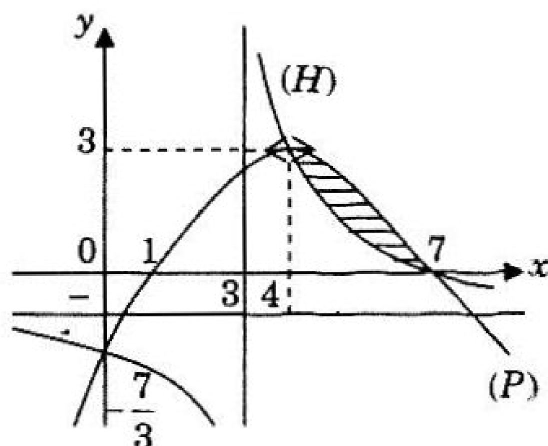
• Vẽ (H): (H) có hai đường tiệm cận:

Tiệm cận đứng $x = 3$

Tiệm cận ngang $y = -1$

• Tọa độ giao điểm của (P) và (H):

$\left(0 ; -\dfrac{7}{3}\right)$; $(4 ; 3)$ và $(7 ; 0)$



2) Gọi S là diện tích tìm.

Ta có: $\forall x \in [4 ; 7]$: $y_{(P)} \geq y_{(H)}$

$$\Rightarrow S = \int_4^7 \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{8x}{3} - \frac{7}{3} - \frac{7-x}{x-3}\right)dx$$

$$\Rightarrow S = \int_4^7 \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{8x}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{x-3}\right)dx = \left[-\frac{x^3}{9} + \frac{4x^2}{3} - \frac{4x}{3} - 4\ln|x-3|\right]\Bigg|_4^7$$

Vậy: $S = 9 - 8\ln 2$ (đvdt).

Ví dụ 6. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số sau trong mặt phẳng tọa độ Oxy: $y = x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1$ và $y = -x^2 + \dfrac{3}{2}x + 1$

(Đại học Dân lập Thăng Long – Hà Nội – 1997)

Giải

1) Vẽ đồ thị (P_1): $y = x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1$ và (P_2): $y = -x^2 + \dfrac{3}{2}x + 1$

• (P_1): $y = x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1 \Rightarrow y' = 2x - \dfrac{5}{2}$, $y' = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{4} \Rightarrow y = -\dfrac{9}{16}$

Đỉnh $A_1\left(\dfrac{5}{4} ; -\dfrac{9}{16}\right)$

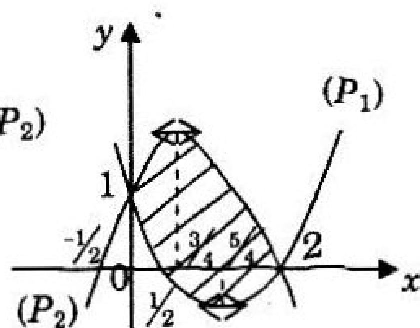
• (P_2): $y = -x^2 + \dfrac{3}{2}x + 1 \Rightarrow y' = -2x + \dfrac{3}{2}$, $y' = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{4} \Rightarrow y = \dfrac{25}{16}$

Đỉnh $A_2\left(\dfrac{3}{4} ; \dfrac{25}{16}\right)$

• Phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2)

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$$



2) Gọi S là diện tích cần tìm, ta có: $\forall x \in [0\ ;\ 2]$: $y_{(P_2)} \geq y_{(P_1)}$

Do đó: $S = \int_0^2 \left[-x^2 + \frac{3}{2}x + 1 - x^2 + \frac{5}{2}x - 1\right]dx$

$= \int_0^2 [-2x^2 + 4x)dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^2 = \left(-\frac{16}{3} + 8\right) - 0 = \frac{8}{3}$

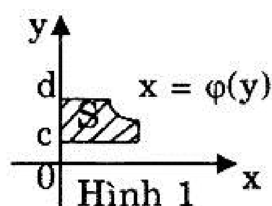
Vậy $S = \frac{8}{3}$ (đvdt).

DẠNG 2. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG TỰA TRỤC *Oy*

Phương pháp

• Diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường cong
$x = \varphi(y)$, $\varphi(y) \geq 0$ trên $[c\ ;\ d]$, trục Oy và các đường thẳng $y = c$, $y = d$ (hình 1) là

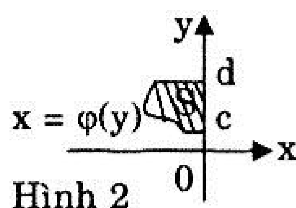
$$S = \int_c^d \varphi(y)dy$$



Hình 1

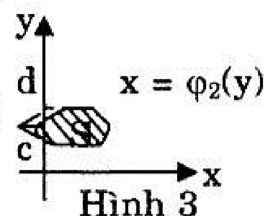
• Nếu $\varphi(y) \leq 0$ trên $[c\ ;\ d]$ thì diện tích hình thang cong (hình 2) là

$$S = -\int_c^d \varphi(y)dy$$



Hình 2

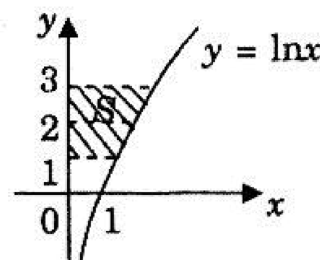
• Diện tích giới hạn bởi hai đường cong $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$ ($\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y)$) và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ (hình 3) là $S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy$



Hình 3

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị: $y = \ln x$, trục Oy và 2 đường thẳng $y = 1$ và $y = 3$.

Giải



Ta có: $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$

Diện tích cho bởi: $S = \int_1^3 |e^y|dy$ $\quad (e^y > 0, \forall y \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow S = \int_1^3 e^y dy = e^y\Big|_1^3 = e^3 - e$

Ví dụ 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = (x + 1)^2$; $x = \sin(\pi y)$ với $0 \leq y \leq 1$; $y = 0$

Giải

$y = (x + 1)^2$ gồm hai nhánh. Xét nhánh ứng với $x \geq -1$, ta có:

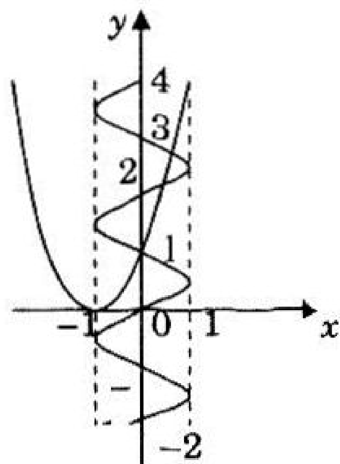
$x + 1 = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = \sqrt{y} - 1$

Vậy: $S = \int_0^1 \left[\sin(\pi y) - (\sqrt{y} - 1)\right] dy$

$= \int_0^1 \left[\sin(\pi y) - \sqrt{y} + 1\right] dy$

$= \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi y) - \frac{\sqrt{y^3}}{\frac{3}{2}} + y\right]\Bigg|_0^1$

$= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{3}.$

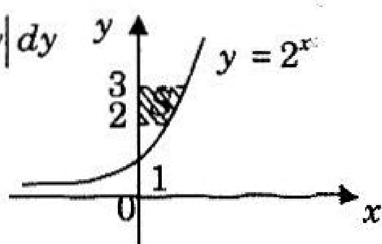


Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y = 2^x$, trục Oy và 2 đường thẳng $y = 2$ và $y = 3$.

Giải

$y = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2 y = \frac{\log_2 y}{\log_2 2} = \frac{\ln y}{\ln 2}$

Diện tích hình phẳng: $S = \int_2^3 \left|\frac{\ln y}{\ln 2}\right| dy = \frac{1}{\ln 2}\int_2^3 |\ln y| dy$



$\ln y = 0 \Leftrightarrow y = 1 \notin (2 ; 3)$

$S = \frac{1}{\ln 2}\left|\int_2^3 \ln y.dy\right|$

Tính $I = \int_2^3 \ln y.dy$. Đặt: $\begin{cases} u = \ln y \\ dv = dy \end{cases}$ ta có: $\begin{cases} du = \frac{1}{y} \\ v = y \end{cases}$

$I = y\ln y\Big|_2^3 - \int_2^3 dy = 3\ln 3 - 2\ln 2 - y\Big|_2^3 = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$

$\Rightarrow S = \frac{1}{\ln 2}(3\ln 3 - 2\ln 2 - 1).$

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 3$ và parabol (P): $y^2 = 2x$.

Tính tỉ số diện tích của 2 phần hình tròn do (P) chia hình tròn (C).

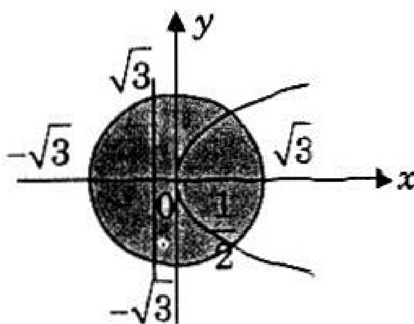
Giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$

*) $x = 1 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \mp\sqrt{2}$

*) $x^2 + y^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 3 - y^2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{3 - y^2}$



*) $y^2 = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}y^2$

Diện tích hình phẳng là:

$$S_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{3-y^2} - \frac{1}{2}y^2\right)dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{3-y^2}dy - \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} y^2dy = I - \frac{1}{2}J$$

Xét: $I = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} y^2dy = \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

Xét: $J = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{3-y^2}dy$

Đặt: $y = \sqrt{3}\sin t$, $dy = \sqrt{3}\cos t.dt$ với $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

Đổi biến

x	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
t	$t = \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right)$	$t = \beta \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$$J = \int_{t}^{t} \sqrt{3-3\sin^2 t}.\sqrt{3}\cos tdt = 3\int_{\alpha}^{\beta}\cos^2 tdt = \frac{3}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(\cos 2t + 1)dt$$

$$= \frac{3}{2}\left.\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\right|_{\alpha}^{\beta} = \frac{3}{2}\left[\beta - \alpha + \frac{1}{2}\left(\sin 2\beta - \sin 2\alpha\right)\right]$$

$$S_1 = I - \frac{1}{2}J = \frac{3}{2}\left[\beta - \alpha + \frac{1}{2}(\sin 2\beta - \sin 2\alpha)\right] - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$S_2 = \pi R^2 - S_1 = \pi\sqrt{3^2} - S_1 = 3\pi - S_1$$

Tỉ số diện tích hai phần hình tròn: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_1}{3\pi - S_1}$

DẠNG 3. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG GIỚI HẠN BỞI ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Phương pháp

> Biến đổi biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối, phân khoảng chuyển về biểu thức không chứa dấu giá trị tuyệt đối, tính tích phân trên các khoảng.

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

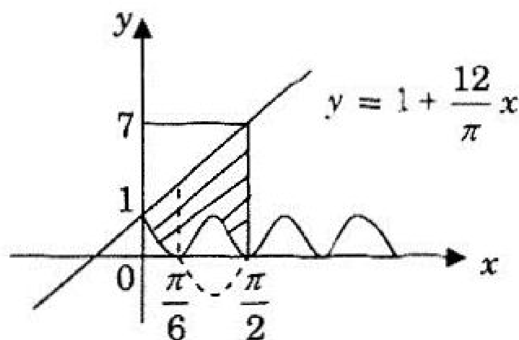
$y = \left|1 - 2\sin^2\frac{3x}{2}\right|$; $\quad y = 1 + \frac{12}{\pi}x$; $x = \frac{\pi}{2}$

Giải

Ta có: $y = \left|1 - 2\sin^2\frac{3x}{2}\right| = \left|\cos 3x\right|$.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{12x}{\pi} - |\cos 3x|\right) dx = \left(x + \frac{6x^2}{\pi}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos 3x|\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} |\cos 3x|\, dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos 3x|\, dx$$



$$= 2\pi - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 3x) dx$$

$$= 2\pi - \left(\frac{\sin 3x}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}\right) + \left(\frac{\sin 3x}{3}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = 2\pi - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 2\pi - 1$$

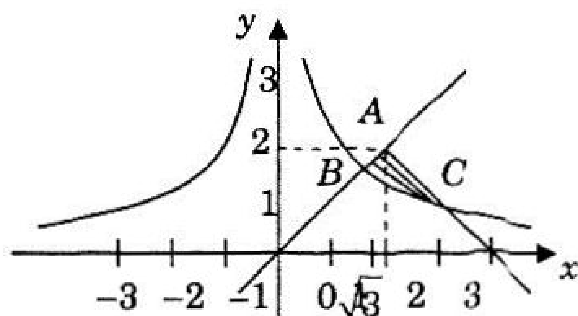
Ví dụ 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số

$$y = 2 - |2 - x| \text{ và } y = \frac{3}{|x|}$$

Giải

Ta tìm hoành độ giao điểm của hai đồ thị. Muốn vậy ta giải phương trình

$$2 - |2 - x| = \frac{3}{|x|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 - (2 - x) = -\dfrac{3}{x} \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 - (2 - x) = \dfrac{3}{x} \\ 0 < x < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 - (x - 2) = \dfrac{3}{x} \\ x \geq 2 \end{cases} \end{array}\right.$$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Từ hình vẽ ta thấy diện tích hình phẳng cần tìm đó là diện tích tam giác cong ABC, trong đó $A(2\ ;\ 2)$, $B(\sqrt{3}\ ;\sqrt{3})$, $C(3\ ;\ 1)$.

Đường thẳng AB có phương trình $y = x$ (do $2 - x \geq 0$).

Đường thẳng AC có phương trình $y = 4 - x$

(do $2 - x < 0$ thì $y = 2 - (x - 2) = 4 - x$)

Vậy $S = \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(x - \frac{3}{x}\right) dx + \int_2^3 \left(4 - x - \frac{3}{x}\right) dx$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - 3\ln x\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{2} + \left(4x - \frac{x^2}{2} - 3\ln x\right)\Bigg|_2^3$$

$$= \frac{1}{2} + 3\ln\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\frac{1}{2} + 3\ln\frac{2}{3} = 2 + 3\ln\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (đvdt)}$$

DẠNG 4. CỰC TRỊ DIỆN TÍCH

Phương pháp

- Sử dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng.
- Khảo sát hàm số thu được theo tham số.

Ví dụ 1. Tìm tất cả giá trị của tham số ($a \geq 1$), sao cho với mỗi giá trị trong các giá trị đó, diện tích của hình phẳng nằm trên nửa mặt phẳng $x \geq 0$ và giới hạn bởi các đường thẳng $y = 1$, $y = 2$ và các đường cong $y = ax^2$, $y = \frac{1}{2}ax^2$ sẽ có giá trị lớn nhất. Tìm diện tích S này.

Giải

Ta tìm tọa độ các giao điểm đồ thị của các hàm số đã cho với đường thẳng $y = 1$. Gọi các giao điểm đó là A, D. Muốn vậy ta giải các hệ phương trình: $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{1}{2}ax^2 \\ y = 2 \end{cases}$

Suy ra $A\left(\frac{1}{\sqrt{a}};1\right)$, $D\left(\sqrt{\frac{2}{a}};1\right)$.

Các hàm số đã cho có đồ thị cắt đường thẳng $y = 2$ tại hai điểm B và C. Tọa độ của hai điểm là nghiệm của hai hệ phương trình

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{2}ax^2 \\ y = 1 \end{cases}$$

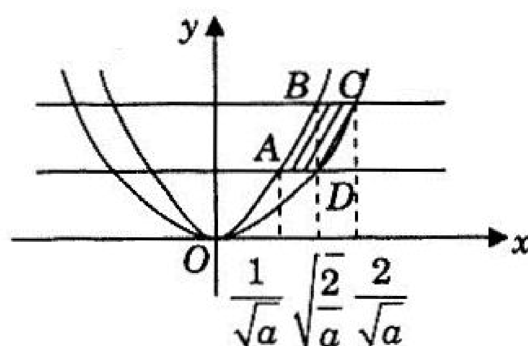
Dẫn đến $B\left(\sqrt{\frac{2}{a}};2\right)$, $C\left(\frac{2}{\sqrt{a}};2\right)$.

Để ý thấy rằng điểm B và D có cùng hoành độ, bởi vậy diện tích hình thang cong $ABCD$ (ký hiệu là S) là tổng diện tích hai tam giác cong ABD (ký hiệu là S_1) và BCD (ký hiệu là S_2). Nghĩa là $S = S_1 + S_2$

$$S_1 = \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{\frac{2}{a}}} (ax^2 - 1)dx, \quad S_2 = \int_{\sqrt{\frac{2}{a}}}^{\frac{2}{\sqrt{a}}} \left(2 - \frac{1}{2}ax^2\right)dx$$

$$S = S_1 + S_2 = \left(\frac{ax^3}{3} - x\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{\frac{2}{a}}} + \left(2x - \frac{ax^3}{6}\right)\Bigg|_{\sqrt{\frac{2}{a}}}^{\frac{2}{\sqrt{a}}}$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{10}{3} - 2\sqrt{2}\right)$$



Xét hàm số $f(a) = \frac{1}{a}\left(\frac{10}{3} - 2\sqrt{2}\right)$.

Với tập xác định $a \geq 1$ ta thấy hàm số đơn điệu giảm. Bởi vậy trong tập xác định này đủ để hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $a = 1$.

Vậy $S_{max} = \frac{10}{3} - 2\sqrt{2}$.

Ví dụ 2. Tìm tất cả giá trị của tham số a ($a > 0$), sao cho với mỗi giá trị trong các giá trị đó diện tích hình phẳng được giới hạn bởi parabol $y = \frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^4}$ và đường thẳng $y = \frac{a^2 - ax}{1 + a^4}$ sẽ có giá trị lớn nhất.

Giải

Trước hết ta tìm hoành độ giao điểm của parabol và đường thẳng đã cho. Muốn vậy ta giải hệ phương trình: $\begin{cases} y = \dfrac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^4} \\ y = \dfrac{a^2 - ax}{1 + a^4} \end{cases}$

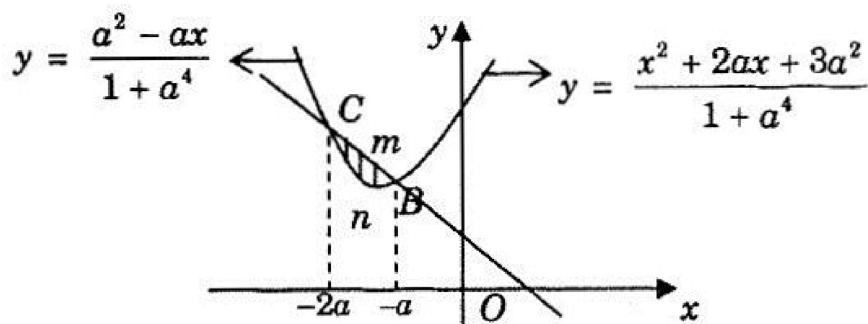
Từ hệ trên ta có $x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$, suy ra $x_1 = -a$, $x_2 = -2a$.

Khi đó $y_1 = \frac{2a^2}{1 + a^4}$, $y_2 = \frac{3a^2}{1 + a^4}$. Dẫn đến đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại hai điểm $B\left(-a\, ; \frac{2a^2}{1 + a^4}\right)$, $C\left(-2a\, ; \frac{3a^2}{1 + a^4}\right)$.

Diện tích hình phẳng cần tìm thể hiện trên hình vẽ, đó là hình phẳng C_mB_n.

Với $-2a \leq x \leq a$, ta tính diện tích hình phẳng, ký hiệu là $S(a)$

$$S(a) = \int_{-2a}^{-a} \left(\frac{a^2 - ax}{1 + a^4} - \frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^4}\right) dx$$



$$= \frac{-1}{1 + a^4} \int_{-2a}^{-a} (x^2 + 3ax + 2a^2) dx$$

$$= \frac{-1}{1 + a^4}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3ax^2}{2} + 2a^2x\right)\Bigg|_{-2a}^{-a} = \frac{a^3}{6(1 + a^4)}$$

Ta cần tính giá trị của a ($a > 0$), sao cho với giá trị đó $S(a)$ nhận giá trị lớn nhất.

Ta có $S'(a) = \frac{1}{6}.\frac{3a^2(1+a^4) - 4a^3.a^3}{(1+a^4)^2} = \frac{a^2(3-a^4)}{(1+a^4)^2}$

Giải phương trình $S'(a) = 0$

$\Leftrightarrow a^2(3 - a^4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \sqrt[4]{3} \end{array}\right.$

Do $a > 0$, nên loại giá trị $a = 0$.

Để ý thấy rằng với $0 < a < \sqrt[4]{3}$, ta có $S'(a) > 0$, còn với $\sqrt[4]{3} < a < +\infty$, ta có $S'(a) < 0$.

Dẫn đến hàm số $S(a)$ đồng biến trên khoảng $0 < a < \sqrt[4]{3}$ và nghịch biến trên khoảng $\sqrt[4]{3} < a < +\infty$. Nghĩa là với $a = \sqrt[4]{3}$ hình phẳng có diện tích lớn nhất.

C. TOÁN TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường:

C_1: $y = \sin x$ và C_2: $y = \cos x$ với $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Bài 2. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi: $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin^2 x$.

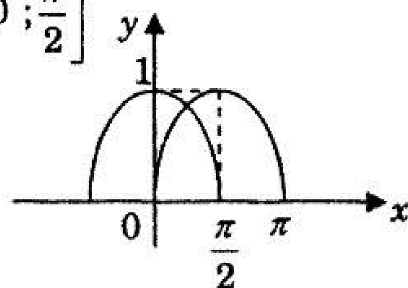
Bài 3. Tính diện tích giới hạn bởi các đường $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$, và $y = 3$, trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

Bài 4*. Tìm giá trị của a ($a \ge 0$), sao cho với giá trị đó hình được giới hạn bởi các parabol $y = \frac{2\sqrt[3]{ax} - x^2}{1+a^3}$ và $y = \frac{x^2}{1+a^3}$ có diện tích lớn nhất.

D. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Xét $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ với $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin x - \cos x$	-1	$-$	0	$+$	1



Diện tích S:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin x - \cos x\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -(\sin x - \cos x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= (\cos x - \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - (\cos x + \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} - 1 - 1 + \sqrt{2} = 2(\sqrt{2} - 1) \text{ (đvdt)}$$

Bài 2. Gọi S là diện tích hình phẳng, ta có:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$$

$$= \frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}(\sin \pi - \sin 0^0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\pi}{4} \text{ (đvdt)}$$

Bài 3. Gọi S là diện tích cần tìm, dựa vào đồ thị ta có:

$$S = \int_0^1 \left[3 - (x^2 - 4x + 3)\right] dx + \int_1^3 \left[3 - (-x^2 + 4x - 3)\right] dx + \int_3^4 \left[3 - (x^2 - 4x + 3)\right] dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + 4x) dx + \int_1^3 (x^2 - 4x + 6) dx + \int_3^4 (-x^2 + 4x) dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x\right)\Big|_1^3 + \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Big|_3^4$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + 2\right) + (9 - 18 + 18) + \left(-\frac{64}{3} + 32 + 9 - 18\right)$$

$$= 8 \text{(đvdt)}$$

Bài 4. Ta tìm hoành độ giao điểm của hai parabol. Muốn vậy ta giải hệ

phương trình $\begin{cases} y = \dfrac{2\sqrt[3]{ax} - x^2}{1 + a^3} \\ y = \dfrac{x^2}{1 + a^3} \end{cases}$

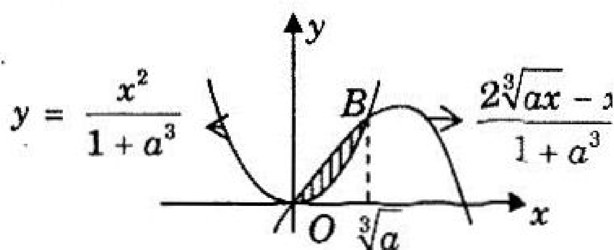
Từ hệ trên ta tìm được các giao điểm của hai parabol: $O(0\ ;\ 0)$, $B\left(\sqrt[3]{a}\ ;\ \dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{1 + a^3}\right)$

Giả sử diện tích hình phẳng phải tìm là $S(a)$ ta có

$$S(a) = \int_0^{\sqrt[3]{a}} \left(\frac{2\sqrt[3]{ax} - x^2}{1 + a^3} - \frac{x^2}{1 + a^3}\right) dx = \frac{a}{3(1 + a^3)}$$

$$S'(a) = \frac{1}{3}.\frac{1 + a^3 - 3a^3}{(1 + a^3)^2} = \frac{1}{3}.\frac{1 - 2a^3}{(1 + a^3)^2}$$

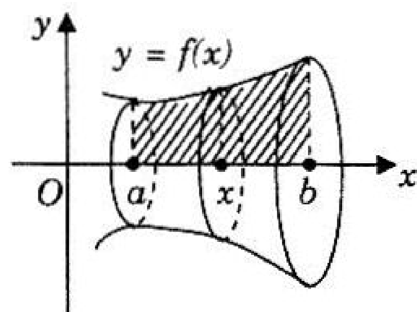
$$S'(a) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2a^3 = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$



Từ đó, ta tìm được tại $a = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$, hình phẳng có diện tích lớn nhất.

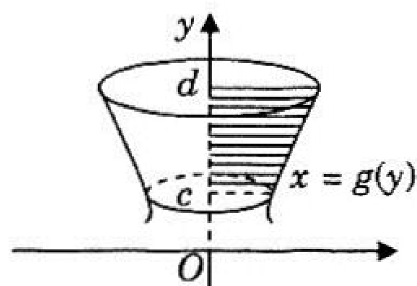
§2. Ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN



1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a ; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích V của nó được tính theo công thức

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (1)$$



2. Cho đường cong có phương trình $x = g(y)$, trong đó g là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[c ; d]$. Hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$, quay quanh trục tung tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích V của nó được tính theo công thức

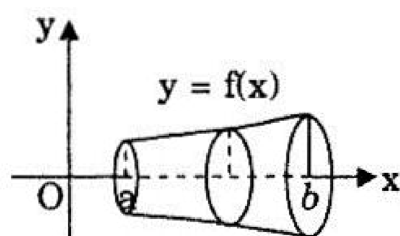
$$V = \pi\int_c^d g^2(y)dy \qquad (2)$$

B. CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH

DẠNG 1. THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TẠO BỞI MIỀN PHẲNG QUAY QUANH Ox

Phương pháp

Trong mặt phẳng (Oxy), một hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $x = a$, $y = 0$ quay xung quanh Ox tạo thành vật thể tròn xoay, thể tích được tính bởi $V_T = \pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2 dx$



Ví dụ 1. Tính thể tích vật thể tạo nên khi quay xung quanh trục Ox hình giới hạn bởi đường cong $2y = x^2$ và đường thẳng $2x + 2y - 3 = 0$.

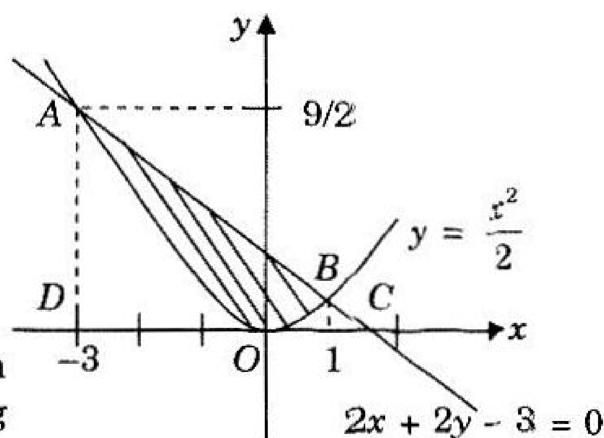
Giải

Trước hết ta tìm hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong

Ta có $2y = x^2 \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2}{2} \Leftrightarrow 2x + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{3 - 2x}{2}$

Đến đây ta giải phương trình $x^2 = 3 - 2x$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$



Dễ thấy tọa độ các điểm $A\left(-3 ; \frac{9}{2}\right)$; $B\left(1 ; \frac{1}{2}\right)$; $D(-3 ; 0)$.

Ta có $V = V_1 - V_2$, ở đây V_1, V_2 lần lượt là thể tích tạo nên khi quay xung quanh trục Ox các hình thang cong $DABC$ và $DAOBC$.

$$V_1 = \pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 dx = \pi\left(\frac{9x}{4} - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{1}$$

$$= \pi\left[\left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{-27}{4} - \frac{27}{2} - \frac{27}{3}\right)\right] = \frac{91}{3}\pi$$

$$V_2 = \pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}.\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-3}^{1} = \frac{61}{5}\pi$$

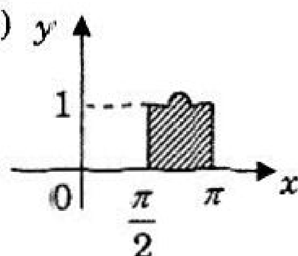
Vậy $V = \frac{91\pi}{3} - \frac{61\pi}{5} = \frac{272}{15}\pi$ (đvtt).

Ví dụ 2. Cho D là miền giới hạn bởi các đường: $y = \sqrt{\cos^4 x + \sin^4 x}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên do ta quay miền D quanh trục Ox.

Giải

Gọi V là thể tích khối tròn xoay, ta có:

$$V = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sqrt{\cos^4 x + \sin^4 x}\right)^2 dx = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos^4 x + \sin^4 x)dx \quad (1)$$



Biết $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

Do đó từ (1) suy ra:

$$V = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\right)dx = \frac{\pi}{4}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}3dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos 4x dx\right] = \frac{\pi}{4}\left(3x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$\Rightarrow V = \frac{3\pi^2}{8}$ (đvtt)

Ví dụ 3. Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox hình phẳng S giới hạn bởi $\begin{cases} y = x.e^x \\ x = 1, 0 \le x \le 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Giải

Xét hàm số $y = x.e^x$, $0 \le x \le 1$

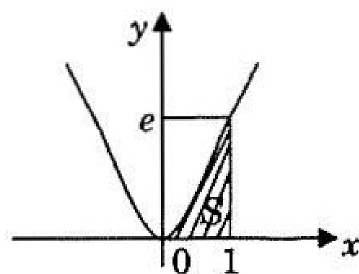
$y' = e^x + x.e^x = e^x(1 + x)$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1 \in [0 ; 1]$

x	0		1
y'		+	
y		↗	

$$V = \pi\int_0^1 (x.e^x)^2 = \pi\int_0^1 x^2.e^{2x}dx$$

Đặt: $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = 2xdx \\ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$



$$V = \pi.x^2.\frac{e^{2x}}{2}\Bigg|_0^1 - \pi\int_0^1 x.e^{2x}dx = \frac{\pi e^2}{2} - \pi J$$

Xét: $J = \int_0^1 x.e^{2x}dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$

$$J = x.\frac{e^{2x}}{2}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{1}{4}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$V = \frac{\pi e^2}{2} - \pi\left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi e^2}{2} - \frac{\pi e^2}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi e^2}{4} - \frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 4. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \tan x$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$, $y = 0$

a) Tính diện tích hình D.

b) Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo bởi hình D khi quay quanh trục Ox.

(Đại học Nông nghiệp I Hà Nội – 1997)

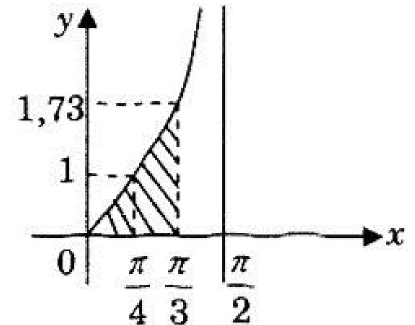
Giải

Vẽ đồ thị của hàm số $y = \tan x$ theo bảng giá trị trong nửa khoảng $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan x$	0	1	1,73	||

a) Tính diện tích hình phẳng D.

Gọi S là diện tích cần tìm thì:



$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = -\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\left[\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) - \ln(\cos 0)\right]$$

$$= -\left[\ln\frac{1}{2} - \ln 1\right] = -[\ln 1 - \ln 2 - \ln 1]$$

Vậy: $S = \ln 2$ (đvdt).

b) Tính V khi D quay quanh trục Ox sinh ra một vật thể tròn xoay nên có thể tích:

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan^2 x + 1 - 1)dx = \pi(\tan x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \pi\left[\left(\tan\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - 0\right] = \pi\left[\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right]$$

Vậy: $V = \pi\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ (đvtt).

Ví dụ 5. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ quay quanh trục Ox.

(Học viện Quân y – 1997)

Giải

Gọi đồ thị (P_1): $y = x^2$ và (P_2): $y = \sqrt{x}$

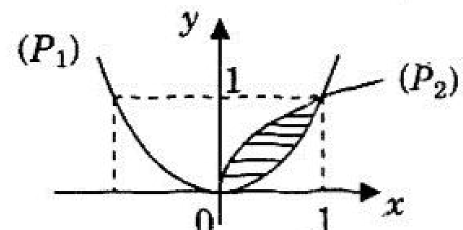
Ta có tọa độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là

$$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 = x \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \text{gốc } O(0\,;0) \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(1\,;1) \end{cases}$$

Do đó: $\forall x \in [0\,;\,1]$: $y_{(P_2)} \geq y_{(P_1)}$.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay do miền giới hạn bởi (P_1) và (P_2) quay quanh trục Ox thì:

$$V = \pi\int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right]dx = \pi\int_0^1 [x - x^4]dx$$



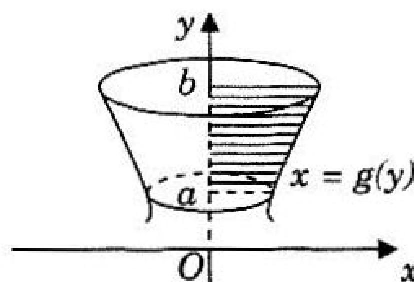
$$= \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

Vậy: $V = \frac{3\pi}{10}$ (đvtt).

DẠNG 2. THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TẠO BỞI MIỀN PHẲNG QUAY QUANH Oy

Phương pháp

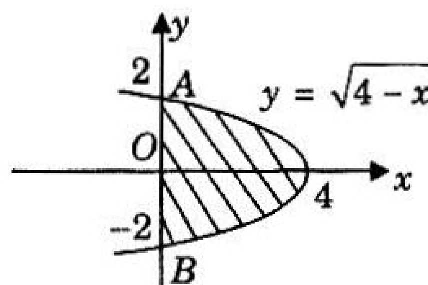
Xét đường cong $x = g(y)$ trong đó $g(y)$ là một hàm liên tục trên đoạn $[a ; b]$.
Nếu hình giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $y = a$, $y = b$ và $x = 0$ quay xung quanh trục Oy thì thể tích V của vật thể sinh ra được tính bởi công thức: $\boxed{V = \pi\int_a^b x^2 dy}$



Ví dụ 1. Tính thể tích vật thể tạo nên khi quay xung quanh trục Oy hình giới hạn bởi đường cong $y^2 = 4 - x$ và đường thẳng $x = 0$.

Giải

Ta tìm tọa độ giao điểm của đường cong và đường thẳng.
Ta có $A(0 ; 2)$, $B(0 ; -2)$.
Mặt khác $y^2 = 4 - x \Leftrightarrow x = 4 - y^2$



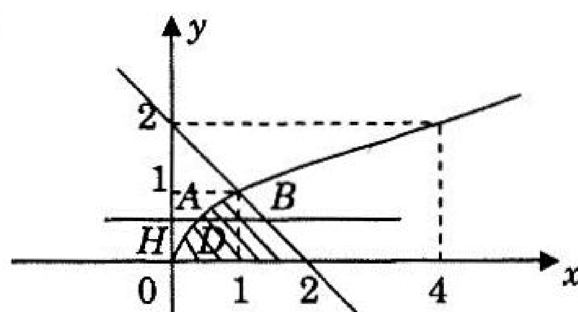
Dẫn đến $V = \pi\int_{-2}^{2} x^2 dy = \pi\int_{-2}^{2} (4 - y^2)^2 dy$

$$= 2\pi\int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4)dy$$

$$= 2\pi\left(16y - \frac{8y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{512}{15}\pi \text{ (đvtt)}$$

Ví dụ 2. Cho (D) là miền kín giới hạn bởi các đường:
$y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$, $y = 0$.
a) Tính diện tích miền (D).
b) Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo ra khi ta quay (D) quanh trục Oy.

Giải



a) Tính diện tích miền (D)

Ta có tọa độ giao điểm của $y = \sqrt{x}$ và $y = 2 - x$ là $(1 ; 1)$.

$$S_{(D)} = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - 0\right)dx + \int_1^2 (2 - x - 0)dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^2 (2-x)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{2}{3} + 2 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}\text{(đvdt)}.$$

b) Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo ra khi ta quay (D) quanh trục Oy.

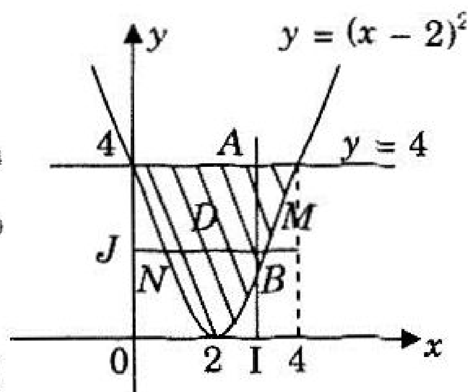
$$V = \int_0^1 \pi.(HB^2 - HA^2)dy = \int_0^1 \pi.\left[(2-y)^2 - y^4\right]dy = \pi\int_0^1 (4 + y^2 - y^4 - 4y)dy$$

$$= \pi\left(4y + \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} - 2y^2\right)\Big|_0^1 = \pi\left(4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - 2\right) = \pi\left(2 + \frac{2}{15}\right) = \frac{32\pi}{15}\text{(đvdt)}$$

Ví dụ 3. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = (x-2)^2$ và $y = 4$. Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi D khi quay nó quanh:

a) trục Ox.

b) trục Oy.



Giải

a) Quay D quanh Ox:

$$V_x = \int_0^4 \pi 4^2 dx - \int_0^4 \pi(x-2)^4 dx = 64\pi - \left[\frac{(x-2)^5}{5}\right]\Big|_0^4$$

$$= 64\pi - \frac{\pi}{5}(2^5 + 2^5) = \frac{356\pi}{5}\text{(đvdt)}$$

b) Quay D quanh Oy: $y = (x-2)^2 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{y}$

$$V_y = \int_0^4 \pi(IM^2 - IN^2)dy = \pi\int_0^4 (x_M^2 - x_N^2)dy = \pi\int_0^4 \left[\left(2+\sqrt{y}\right)^2 - \left(2-\sqrt{y}\right)^2\right]dy$$

$$= \pi\int_0^4 8\sqrt{y}dy = 8\pi.\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{16\pi}{3}.8 = \frac{128\pi}{3}\text{(đvdt)}$$

C. TOÁN TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính thể tích vật thể nhận được khi quay xung quanh trục Ox hình giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = x + 2$.

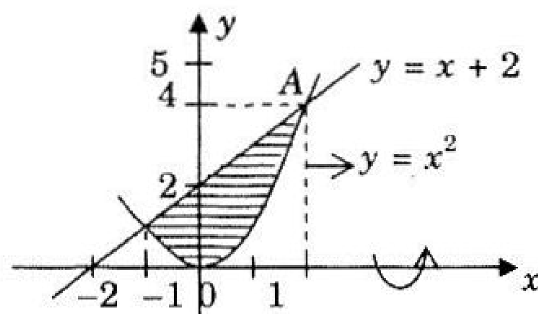
Bài 2. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường: $y = 4 - x^2$ và $y = x^2 + 2$. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được vật thể (K). Tính thể tích vật thể (K).

Bài 3. Tính thể tích hình elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ quay quanh trục Ox.

D. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Ta tìm hoành độ giao điểm của hai đường đã cho. Muốn vậy ta giải phương trình

$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$



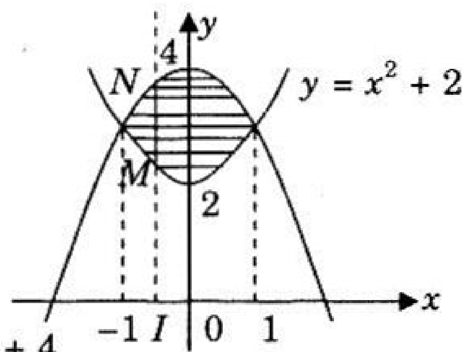
Từ hình vẽ ta có

$$V = \pi\left(\int_{-1}^{2}(x+2)^2dx - \int_{-1}^{2}x^4dx\right)$$

$$= \pi\int_{-1}^{2}(x^2 + 4x + 4 - x^4)dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - \frac{x^5}{5} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 14{,}4\pi \text{ (đvtt)}$$

Bài 2.



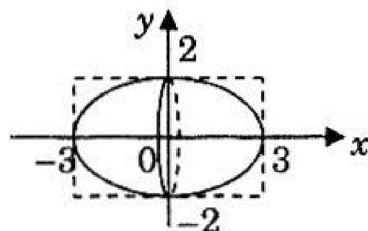
$$V = \int_{-1}^{1}\pi.IN^2dx - \int_{-1}^{1}\pi.IM^2dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\pi.(4-x^2)^2dx - \int_{-1}^{1}\pi.(x^2+2)^2dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{1}(x^4 - 8x^2 + 16 - x^4 - 4x^2 - 4)dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{1}(-12x^2 + 12)dx = 12\pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 16\pi \text{ (đvdt)}$$

Bài 3. Ta có: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$



$$V = \pi\int_{-3}^{3}y^2dx = \pi\int_{-3}^{3}4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)dx = 4\pi\left(x - \frac{x^3}{27}\right)\Bigg|_{-3}^{3}$$

$$= 4\pi[(3-1) - (-3+1)] = 16\pi \text{ (đvdt)}$$

§3 (nâng cao). Ứng dụng tích phân trong giải toán đại số, giải tích và tổ hợp

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Kiến thức đại số

Định lí 1. Cho hai số thực a, b trái dấu ($a < 0 < b$) và $f(x)$ là một hàm số liên tục, không âm (có thể bằng 0 tại một số hữu hạn điểm) trên $[a ; b]$. Khi đó, trong $[a ; b]$, phương trình $F(x) = \int_0^x f(t)dt = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Chứng minh

Ta thấy $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a ; b]$.

– Nếu $x = 0$ thì $F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$. Vậy $x = 0$ là nghiệm của phương trình $F(x) = 0$

– Nếu $x \neq 0$ và $x \in [a ; b]$, thì từ giả thiết $f(x) \geq 0$, ta suy ra $F(x)$ đồng biến trên $[a ; b]$ và $F(x) \neq F(0) = 0$, tức phương trình $F(x) = 0$ không thể có nghiệm $x \neq 0$ trên $[a ; b]$.

Vậy phương trình $F(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Định lí 2. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trong $[a ; b]$ và giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của nó. Khi đó, nếu tồn tại các số thực x_1, $x_2 \in [a ; b]$ với $x_1 < x_2$, sao cho $F(x_1) = F(x_2)$, thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong $[x_1 ; x_2]$.

Chứng minh

Giả sử phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm thuộc $[x_1 ; x_2]$. Vì $f(x)$ liên tục nên suy ra: hoặc $f(x) > 0$, $\forall x \in [x_1 ; x_2]$, hoặc $f(x) < 0$, $\forall x \in [x_1 ; x_2]$.

Nếu $f(x) > 0$, $\forall x \in [x_1 ; x_2]$ thì hàm số $F(x)$ đồng biến trên đoạn $[x_1 ; x_2]$. Suy ra $F(x_1) < F(x_2)$, trái với giả thiết.

Nếu $f(x) < 0$, $\forall x \in [x_1 ; x_2]$ thì hàm số $F(x)$ nghịch biến trên đoạn $[x_1 ; x_2]$. Suy ra $F(x_1) > F(x_2)$, trái với giả thiết.

Như vậy, trong cả hai trường hợp, ta đều có $F(x_1) \neq F(x_2)$, điều này trái với giả thiết: $F(x_1) = F(x_2)$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong $[x_1 ; x_2]$.

2. Kiến thức giới hạn

– Phân tích và đem tổng về dạng: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$.

– Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0 ; 1]$.

– Dùng phép phân hoạch đoạn $[0 ; 1]$ và lập tổng tích phân:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{1}{n} \text{ với } x_i = \frac{i}{n}$$

– Dùng định nghĩa hoặc dùng công thức Newton – Leibnitz để tính giới hạn của tổng trên: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx = \left[F(x)\right]\Big|_0^1$

3. Kiến thức tổ hợp

– Công thức tổ hợp n chập r: $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ với $n! = 1.2.3..n$ và $\forall n, r \in \mathbb{N}$

– Công thức khai triển nhị thức Newton:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^r a^{n-r}b^r + ... + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

– Tính tích phân $\int_\alpha^\beta f(x)dx$; khai triển và phân tích rồi đưa về dạng nhị thức Newton.

B. CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH

DẠNG 1. CÁC BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

Ví dụ 1. Giải phương trình $4x^3 + 12x - 8 - \cos 3x + 9\cos x = 0$ trong $[0 ; +\infty)$.

Giải

Đặt $F(x) = 4x^3 + 12x - 8 - \cos 3x + 9\cos x$. Ta có $F(0) = 0$ và

$$F(x) = \int_0^x (4t^3 + 12t - 8 - \cos 3t + 9\cos t)'dt = \int_0^x (12t^2 + 12 + 3\sin 3t - 9\sin t)dt$$

$$= 12\int_0^x \left(t^2 + 1 + \frac{\sin 3t - 3\sin t}{4}\right)dt = 12\int_0^x (t^2 + 1 + \sin^3 t)dt$$

Ta thấy, hàm số $f(t) = 12(t^2 + 1 + \sin^3 t)$ liên tục và không âm với mọi $t \geq 0$, nên theo Định lí 1, phương trình $4x^3 + 12x - 8 - \cos 3x + 9\cos x = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sin x + \cos x + \sqrt{2}x - 1 = 0$.

Giải

Đặt $F(x) = \sin x + \cos x + \sqrt{2}x - 1$. Khi đó $F(0) = 0$. Ta có

$$F(x) = \int_0^x (\sin t + \cos t + \sqrt{2}t - 1)'dt = \int_0^x (\cos t - \sin t + \sqrt{2})dt.$$

Nhận thấy rằng, hàm số $f(t) = \cos t - \sin t + \sqrt{2}$ liên tục và không âm $\forall t \in \mathbb{R}$, nên theo định lí 1, phương trình $\sin x + \cos x + \sqrt{2}x - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng phương trình

$$(3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 - 5^x \ln 5)\tan x + \frac{3^x + 2^x - 5^x}{\cos^2 x} = 0$$

có nghiệm thuộc $(0 ; 1)$.

Giải

Xét hàm số $f(x) = (3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 - 5^x \ln 5)\tan x + \dfrac{3^x + 2^x - 5^x}{\cos^2 x}$.

Ta thấy, $f(x)$ liên tục trên $[0 ; 1]$ và có một nguyên hàm là

$F(x) = (3^x + 2^x - 5^x)\tan x$.

Ta có $F(1) = 0$, $F(0) = 0$, nên $F(1) = F(0)$.

Vậy, theo Định lí 2, phương trình đã cho có nghiệm trong $(0 ; 1)$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng phương trình $2(x^2 - x - 2)\cos 2x = (1 - 2x)\sin 2x$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt trong $(-1 ; 2)$.

Giải

Viết phương trình đã cho dưới dạng $2(x^2 - x - 2)\cos 2x - (1 - 2x)\sin 2x = 0$

Ta thấy, hàm số $f(x) = 2(x^2 - x - 2)\cos 2x - (1 - 2x)\sin 2x$ là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm $F(x) = (x^2 - x - 2)\sin 2x$

Ta có $F(-1) = 0$, $F(0) = 0$, $F(2) = 0$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, theo Định lí 2 thì trong mỗi khoảng $(-1\ ;\ 0)$, $\left(0\ ;\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}\ ;2\right)$, phương trình đã cho đều có ít nhất một nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm phân biệt trong $(-1\ ;\ 2)$.

Ví dụ 5. Chứng minh bất đẳng thức $\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, $x > 0$

Giải

Ta biết rằng khi $x > 0$ thì $\sin x < x$

Suy ra $\int_0^x \sin x dx < \int_0^x x dx \Leftrightarrow 1 - \cos x < \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$

$\Leftrightarrow \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx < \int_0^x \cos x dx \Leftrightarrow x - \frac{x^3}{6} < \sin x \Leftrightarrow \int_0^x \left(x - \frac{x^3}{6}\right) dx < \int_0^x \sin x dx$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} < 1 - \cos x \Leftrightarrow \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \Leftrightarrow \int_0^x \cos x dx < \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) d$

$\Leftrightarrow \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ (đpcm)

Ví dụ 6. Chứng minh rằng với $x > y > 0$, thì

$(x - y)\left[2 - (x + y)\right] < 2\ln\frac{1 + x}{1 + y}$ (1)

Giải

Ta viết lại (1) dưới dạng $2(x - y) - (x^2 - y^2) < 2\left[\ln(1 + x) - \ln(1 + y)\right]$.

Nhận xét rằng, với mọi $t \in \mathbb{R}^+$ thì $\frac{1}{1 + t} > 1 - t$.

Vậy nên, khi $0 < y \le t \le x$, ta có $\int_y^x \frac{dt}{1 + t} > \int_y^x (1 - t) dt$ hay $\ln\left|1 + t\right|\Big|_y^x > \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_y^x$.

Vậy nên $\ln\frac{1 + x}{1 + y} > (x - y) - \frac{x^2 - y^2}{2}$.

Từ đó ta thu được $2\ln\frac{1 + x}{1 + y} > (x - y)[2 - (x + y)]$.

Ví dụ 7. Cho $x > 0$, hãy chứng minh $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $\forall n \ge 1$.

Giải

Quy nạp theo n.

$n = 1$. Từ $e^t > 1$ với $t > 0$ suy ra $\int_0^x e^t dt > \int_0^x dt$ hay $e^x - 1 > x \Rightarrow e^x > 1 + x$.

Giả sử với $n = k$ có:

$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^k}{k!}, x > 0$

$\Rightarrow \int_0^t e^x dx > \int_0^t \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^k}{k!}\right)dx$ với $t > 0$

$\Rightarrow e^t - 1 > t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + ... + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$

Thay t bởi e^x có $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = 2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 11x,\ x \in [0\ ;\ 1].$$

Giải

Ta có $g(t) = t^5 + t^3 + t$ là hàm liên tục và đồng biến trên $[0\ ;\ 1]$.

Do đó, $\forall t \in [0\ ;\ 1]$, ta có $\int_0^x (t^5 + t^3 + t)dt \le x\int_0^1 (t^5 + t^3 + t)dt$,

hay $\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \le x\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$.

Suy ra $2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 11x \le 0$.

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số:

$y = f(x)$, $x \in [0\ ;\ 1]$ bằng 0, khi $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Ví dụ 9. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = \sqrt{2}x^5 - x\left[4\sqrt{2} - 5\ln(1+\sqrt{2})\right] - 5\sqrt{2}\ln(1+x)$, $x \in \left[0\ ;\sqrt{2}\right]$.

Giải

Ta thấy $g(t) = -t^4 + \frac{1}{t+1}$ là hàm liên tục và nghịch biến trên $\left[0\ ;\sqrt{2}\right]$,

nên $\forall t \in \left[0\ ;\sqrt{2}\right]$, thì

$$\sqrt{2}\int_0^x \left(-t^4 + \frac{1}{t+1}\right)dt \ge x\int_0^{\sqrt{2}} \left(-t^4 + \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left[-\frac{x^5}{5} + \ln(1+x)\right] \ge x\left[-\frac{4\sqrt{2}}{5} + \ln(1+\sqrt{2})\right]$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x^5\sqrt{2}}{5} + \sqrt{2}\ln(x+1) \ge -\frac{4\sqrt{2}x}{5} + x\ln(1+\sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x^5 - x\left[4\sqrt{2} - 5\ln(1+\sqrt{2})\right] - 5\sqrt{2}\ln(1+x) \le 0.$$

Vậy, giá trị lớn nhất của $f(x)$ bằng 0 khi $x = 0$, $x = \sqrt{2}$.

Ví dụ 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = (x^2 - 1)\ln(1+x) - x^2\left(\frac{1}{2} + \ln 2\right) + x$, $x \ge 0$.

Giải

Xét hai hàm số sau $g(t) = t^6$ và $h(t) = e^{t^2}$. Ta thấy $g(t)$ và $h(t)$ là những hàm liên tục, không âm và đồng biến $\forall t \geq 0$.

Ta có $x^2 \ln 2 \leq \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt + 2\int_0^x t\ln(1+t)dt$.

Từ các đẳng thức $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt = \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t)\right]\Bigg|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$

$$\int_0^x t\ln(1+t)dt = \frac{1}{2}\left[t^2\ln(1+t) - \frac{t^2}{2} + t - \ln(1+t)\right]\Bigg|_0^x$$
$$= \frac{1}{2}\left[x^2\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x - \ln(1+x)\right]$$

ta thu được $x^2 \ln 2 \leq \ln 2 - \frac{1}{2} + x^2\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x - \ln(1+x)$

hay $(x^2 - 1)\ln(1+x) - x^2\left(\frac{1}{2} + \ln 2\right) + x \geq \frac{1}{2} - \ln 2$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng $\frac{1}{2} - \ln 2$ khi $x = 1$.

Ví dụ 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = (3 + 2\ln 2)x - 2^{x+1} - \ln 2.x^2,\ x \in [0\ ;\ 2].$$

Giải

Ta có $g(t) = -2^t - t$ là hàm số liên tục và nghịch biến trong $[0\ ;\ 2]$, nên $\forall t \in [0\ ;\ 2]$ thì

$$-2\int_0^x (2^t + t)dt \geq -x\int_0^2 (2^t + t)dt \Leftrightarrow 2\int_0^x (2^t + t)dt \leq x\int_0^2 (2^t + t)dt$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{2^t}{\ln 2} + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^x \leq x\left(\frac{2^t}{\ln 2} + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + x^2 - \frac{2}{\ln 2} \leq \frac{4x}{\ln 2} + 2x - \frac{x}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{x+1} + x^2\ln 2 - 2 \leq 4x + 2x\ln 2 - x$$

$$\Leftrightarrow (3 + 2\ln 2)x - 2^{x+1} - \ln 2.x^2 \geq -2$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng -2 khi $x = 0$, $x = 2$.

DẠNG 2. TOÁN TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Ví dụ 1. Cho $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$?

Giải

Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{x+1}$ xác định trên $[0\ ;\ 1]$.

Chia đoạn [0 ; 1] bởi các điểm: $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, ..., x_i = \frac{i}{n}, ..., x_n = 1$

$$\Rightarrow \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} \Rightarrow f(x_i) = \frac{1}{\frac{i}{n}+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\frac{i}{n}+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln 2.$$

Ví dụ 2. Tính: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + ... + e^{\frac{n}{n}}\right)$.

Giải

Xét hàm số: $f(x) = e^x$ xác định trên [0 ; 1].

Chia đoạn [0 ; 1] bởi các điểm:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, ..., x_{i-1} = \frac{i-1}{n}, x_i = \frac{i}{n}, ..., x_n = 1$$

$$\Rightarrow \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} \Rightarrow f(x_i) = e^{\frac{i}{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}.e^{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + ... + e^{\frac{n}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + ... + e^{\frac{n}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i = \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1$$

Ví dụ 3. Tính $\lim_{n\to+\infty} S_n$, biết: $S_n = \frac{n}{1-4n^2} + \frac{n}{4-4n^2} + ... + \frac{n}{n^2-4n^2}$.

Giải

Ta có: $S_n = \frac{n}{1-4n^2} + \frac{n}{4-4n^2} + ... + \frac{n}{n^2-4n^2}$

$$= \left[\frac{1}{\frac{1}{n^2}-4} + \frac{1}{\frac{4}{n^2}-4} + ... + \frac{1}{\frac{n^2}{n^2}-4}\right].\frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{i}{n}\right)^2 - 4}.\frac{1}{n}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ liên tục trên [0 ; 1].

Phân hoạch đều đoạn [0 ; 1] thành n đoạn nhỏ bởi các điểm:

$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = 1$

Ta có: $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$ với $x_i = \frac{i}{n}$

Trên $[x_{i-1} ; x_i]$ chọn điểm $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$, ta có: $f(x_i) = \frac{1}{\left(\frac{i}{n}\right)^2 - 4}$

Lập tổng tích phân: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{i}{n}\right)^2 - 4} \cdot \frac{1}{n}$

Vậy: $\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{3}$.

Ví dụ 4. Tính $\lim_{n \to +\infty} S_n$, biết:

$$S_n = \frac{1^2}{2^3 + n^3} + \frac{2^2}{4^3 + n^3} + ... + \frac{k^2}{(2k)^3 + n^3} + ... + \frac{n^2}{(2n)^3 + n^3}$$

Giải

Ta có: $S_n = \frac{1^2}{2^3 + n^3} + \frac{2^2}{4^3 + n^3} + ... + \frac{n^2}{(2n)^3 + n^3}$

$$= \left[\frac{1^2}{\left(\frac{2}{n}\right)^3 + 1} + \frac{2^2}{\left(\frac{4}{n}\right)^3 + 1} + ... + \frac{n^2}{\left(\frac{2n}{n}\right)^3 + 1}\right] \cdot \frac{1}{n^3}$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{8\left(\frac{1}{n}\right)^3 + 1} + \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{8\left(\frac{2}{n}\right)^3 + 1} + ... + \frac{\left(\frac{n}{n}\right)^2}{8\left(\frac{n}{n}\right)^3 + 1}\right] \cdot \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{i}{n}\right)^2}{8\left(\frac{i}{n}\right)^3 + 1} \cdot \frac{1}{n}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{8x^3 + 1}$ liên tục trên đoạn [0 ; 1].

Phân hoạch đều đoạn [0 ; 1] thành n đoạn nhỏ bởi các điểm:

$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = 1$

Ta có: $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$ với $x_i = \frac{i}{n}$

Trên $[x_{i-1}; x_i]$ chọn điểm $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$, ta có: $f(x_i) = \dfrac{\left(\frac{i}{n}\right)^2}{8\left(\frac{i}{n}\right)^3 + 1}$

Lập tổng tích phân: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\left(\frac{i}{n}\right)^2}{8\left(\frac{i}{n}\right)^3 + 1} \cdot \frac{1}{n}$

Vậy: $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{8x^3 + 1} = \frac{1}{24}\left[\ln\left|8x^3 + 1\right|\right]\Big|_0^1 = \frac{\ln 3}{12}$.

Ví dụ 5. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$!

đặt $S_n = \frac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1 + \sin\frac{\pi}{2n}} + \dfrac{1}{1 + \sin\frac{2\pi}{2n}} + \ldots + \dfrac{1}{1 + \sin\frac{k\pi}{2n}}\right)$

Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

(Đại học Quốc gia Hà Nội – 1995, khối B)

Giải

Ta có: $S_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1 + \sin k\frac{\pi}{2n}}$

Tổng này là tổng tích phân của I:

$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x} = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{1 + \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = -\frac{2}{\pi}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}\left[\tan 0 - \tan\frac{\pi}{4}\right] = \frac{2}{\pi}$$

Vậy: $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = I = \frac{2}{\pi}$

DẠNG 3. CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP

Ví dụ 1. a) Tính tích phân $\int_0^1 x(1 - x)^{19} dx$.

b) Rút gọn tổng: $S = \frac{1}{2}C_{19}^{0} - \frac{1}{3}C_{19}^{1} + \frac{1}{4}C_{19}^{2} - ... + \frac{1}{20}C_{19}^{18} - \frac{1}{21}C_{19}^{19}$.

(ĐH Nông nghiệp I Hà Nội – 1999)

Giải

a) Tính $\int_0^1 x(1-x)^{19}dx$

Đặt: $t = 1 - x \Rightarrow -dt = dx \Rightarrow x = 1 - t$

Đổi cận: $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 0 \end{array}\right.$

Vậy $I = \int_0^1 x(1-x)^{19}dx = \int_1^0 (1-t)t^{19}(-dt) = \int_0^1 (t^{19} - t^{20})dt = \left[\frac{t^{20}}{20} - \frac{t^{21}}{21}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{120}$.

b) Theo nhị thức Newton ta có:

$$x(1-x)^{19} = x(C_{19}^{0} - C_{19}^{1}x + C_{19}^{2}x^2 - ... + C_{19}^{18}x^{18} - C_{19}^{19}x^{19})$$

$$= C_{19}^{0}x - C_{19}^{1}x^2 + C_{19}^{2}x^3 - ... + C_{19}^{18}x^{19} - C_{19}^{19}x^{20}$$

$$\int_0^1 x(1-x)^{19}dx = \left[C_{19}^{0}\frac{x^2}{2} - C_{19}^{1}\frac{x^3}{3} + ... - C_{19}^{19}\frac{x^{21}}{21}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}C_{19}^{0} - \frac{1}{3}C_{19}^{1} + ... - \frac{1}{21}C_{19}^{19} = \frac{1}{420}$$

Ví dụ 2. Cho n là một số nguyên dương

a) Tính tích phân $I = \int_0^1 (1+x)^n dx$.

b) Tính tổng số $S = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$.

(ĐH Sư phạm TPHCM, khối D, E – 2000)

Giải

a) Ta có: $I = \int_0^2 (1+x)^n dx = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ (1)

b) Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n$

Vậy $I = \int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 (C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n)dx$

$$= \left[C_n^0x + C_n^1\frac{x^2}{2} + C_n^2\frac{x^3}{3} + ... + C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]\Big|_0^1$$

$$= C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $S = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Ví dụ 3. a) Tính tích phân: $I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$

(ĐH Bách khoa HN – 1997)

Giải

a) Đặt $u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2xdx$

Khi $x = 0 \Rightarrow u = 1$; $x = 1 \Rightarrow u = 0$

Ta có: $I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx = -\frac{1}{2}\int_1^0 u^n du = -\frac{1}{2}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]\Big|_1^0 = \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n+2}$

b) Ta có: $x(1-x^2)^n = x(C_n^0 1 - C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 - C_n^3 x^6 + ... + (-1)^n C_n^n x^{2n})$

$= C_n^0 x - C_n^1 x^3 + C_n^2 x^5 - C_n^3 x^7 + ... + (-1)^n C_n^n x^{2n+1}$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn [0 ; 1], ta có:

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = C_n^0 \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - C_n^1 \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + C_n^2 \frac{x^6}{6}\Big|_0^1 - C_n^3 \frac{x^8}{8}\Big|_0^1 + ... + (-1)^n C_n^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\Big|_0^1$$

Vậy $\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng:

$$2C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 2^2 + \frac{1}{3}C_n^2 2^3 - ... + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n 2^{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[1 + (-1)^n\right]$$

Giải

• Xét $I = \int_0^2 (1-x)^n dx = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^2 = -\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1}\left[1 - (-1)^{n+1}\right]$

$= \frac{1}{n+1}\left[1 + (-1)^n\right]$ (1)

• Lại xét $I = \int_0^2 (1-x)^n dx = \int_0^2 \left[C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - ... + (-1)^n C_n^n x^n\right] dx$

$= \left[C_n^0 x - \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 - ... + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1}\right]\Big|_0^2$

$= 2C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 2^2 + \frac{1}{3}C_n^2 2^3 - ... + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n 2^{n+1}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được:

$$2C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 2^2 + \frac{1}{3}C_n^2 2^3 - ... + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n 2^{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[1 + (-1)^n\right]$$

Chú ý. Vì các số hạng có dạng $C_n^k 2^{k+1}$ nên cận trên của tích phân ta chọn là hai (thông thường cận dưới của tích phân là 0).

C. TOÁN TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $a \ge 1$, $b \ge 1$. Chứng minh rằng $ab \le e^{a-1} + b\ln b$.

Bài 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = e^{\frac{e}{b}} + b(\ln b - 1)$, $1 < b < e$.

Bài 3. Với mỗi số nguyên dương n, đặt: $S_n = \dfrac{1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + n^5}{n^6}$. Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Bài 4. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 2.

1. Tính tích phân $I_n = \int\limits_0^1 x^2(1 + x^3)^n dx$.

2. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{3}C_n^0 + \dfrac{1}{6}C_n^1 + \dfrac{1}{9}C_n^2 + ... + \dfrac{1}{3n + 3}C_n^n = \dfrac{2^{n+1} - 1}{3(n + 1)}$.

(ĐH Mở Hà Nội – 1999)

D. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Xét hàm số $y = \ln x$ với $x \geq 1$. Ta có $x = e^y$.

Gọi S_1 là diện tích hình giới hạn bởi các đường $y = 0$, $x = 0$, $y = a - 1$, $x = e^y$ và gọi S_2 là diện tích hình giới hạn bởi các đường $y = 0$, $x = b$, $y = \ln x$. Khi đó, ta thấy $b(a - 1)$ chính là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi các đường $x = 0$, $y = 0$, $x = b$, $y = a - 1$.

Vậy nên (trong cả hai trường hợp $\ln b \geq (a - 1)$ và $\ln b < (a - 1)$)

$$S_1 + S_2 \geq b(a - 1) \qquad (1)$$

Ta có $S_1 = \int\limits_0^{a-1} e^y dy = e^y \Big|_0^{a-1} = e^{a-1} - 1$

và $S_2 = \int\limits_1^b \ln x dx = (x \ln x - x)\Big|_1^b = b \ln b - b + 1$

Thay S_1 và S_2 vào (1), ta nhận được $e^{a-1} + b \ln b - b \geq b(a - 1)$

hay $e^{a-1} + b \ln b \geq ab$

Bài 2. Đặt $\dfrac{e}{b} = a$, thì $ab = e$ và $a > 1$. Hàm số $f(x) = e^x$ liên tục, không âm và đơn điệu tăng trên $(0 ; +\infty)$ có $f(0) = 1$ và có hàm ngược bằng $y = \ln x$, nên ta có

$$\int\limits_0^a e^x dx + \int\limits_1^b \ln x dx \geq ab \Leftrightarrow e^x \Big|_0^a + (x \ln x - x)\Big|_1^b \geq ab \Leftrightarrow e^a - 1 + b \ln b - b + 1 \geq a$$

$$\Leftrightarrow e^a + b(\ln b - 1) \geq ab = e.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $b = f(a)$ hay $b = e^a$, từ đó, ta có $a = 1$, $b = e$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng e, khi $a = 1$, $b = e$.

Bài 3. Xét hàm số: $f(x) = x^5$ xác định trên $[0 ; 1]$

Chia đoạn $[0 ; 1]$ bởi các điểm: $x_0 = 0$, $x_1 = \dfrac{1}{n}$, ..., $x_i = \dfrac{1}{n}$, ..., $x_n = 1$

$$\Rightarrow \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} \Rightarrow f(x_i) = \left(\frac{i}{n}\right)^5$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^5 = \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5}{n^6}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_0^1 x^5 dx = \left.\frac{x^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Bài 4. Đặt: $u = 1 + x^3 \Rightarrow du = 3x^2dx \Rightarrow \frac{du}{3} = x^2dx$

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = 2 \end{cases}$

$$I_n = \frac{1}{3}\int_1^2 u^n du = \frac{1}{3}\left.\frac{u^{n+1}}{n+1}\right|_1^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\right] = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)} \quad (1)$$

Mặt khác ta có: $(1 + x^3)^n = C_n^0 + C_n^2x^3 + C_n^2x^6 + \ldots + C_n^nx^{3n}$

Suy ra: $x^2(1 + x^3)^n = C_n^0x^2 + C_n^1x^5 + C_n^2x^8 + \ldots + C_n^nx^{3n+2}$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2(1 + x^3)^n dx = C_n^0 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + C_n^1 \left.\frac{x^6}{6}\right|_0^1 + \ldots + C_n^n \left.\frac{x^{3n+3}}{3n+3}\right|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{3n+3}C_n^n \quad (2)$$

So sánh (1), (2)

Ta có: $\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{3n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$.

TOÁN TỰ LUẬN ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng.
- Ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể.
- Ứng dụng tích phân giải toán đại số, giải tích và tổ hợp.

B. BÀI TẬP

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn *Oxy*, *D* là miền giới hạn bởi các đường có phương trình: $y = x^2$; $y = \frac{x^2}{27}$; $y = \frac{27}{x}$. Tính diện tích của *D*.

(Đại học Mỏ – Địa chất Hà Nội – 1998)

Giải

Gọi đồ thị (P_1): $y = x^2$; (P_2): $y = \frac{x^2}{27}$ và (H): $\frac{27}{x}$

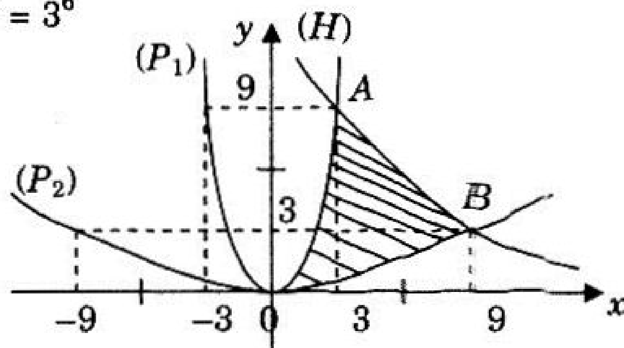
Ta tìm được tọa độ giao điểm của các đường cong:

- $(P_1) \cap (P_2) \Leftrightarrow x^2 = \frac{x^2}{27} \Leftrightarrow 27x^2 = x^2 \Leftrightarrow 26x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow O(0 ; 0)$

• $(P_1) \cap (H) \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{27}{x} \Leftrightarrow x^3 = 27 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow A(3\ ;\ 9)$

• $(P_2) \cap (H) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{27} = \dfrac{27}{x} \Leftrightarrow x^3 = 27^2 = 3^6$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(9\ ;\ 3)$



Gọi S là diện tích của miền giới hạn D

Ta có: $\forall x \in [0\ ;\ 3]$: $y_{(P_1)} \geq y_{(P_2)}$

$\Leftrightarrow x^2 \geq \dfrac{x^2}{27}$

$\forall x \in [3\ ;\ 9]$: $y_{(H)} \geq y_{(P_2)} \Leftrightarrow \dfrac{27}{x} \geq \dfrac{x^2}{27}$

Do đó: $S = \int_0^3 \left|x^2 - \dfrac{x^2}{27}\right| dx + \int_3^9 \left|\dfrac{27}{x} - \dfrac{x^2}{27}\right| dx = \left[\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^3}{3^4}\right]\Bigg|_0^3 + \left[27\ln|x| - \dfrac{x^3}{3^4}\right]\Bigg|_3^9$

$$= \left|\dfrac{3^3}{3} - \dfrac{3^3}{3^4}\right| + \left[\left(27\ln 9 - \dfrac{9^3}{3^4}\right) - \left(27\ln 3 - \dfrac{3^3}{3^4}\right)\right]$$

$$= \left[9 - \dfrac{1}{3}\right] + \left[54\ln 3 - 9 - 27\ln 3 + \dfrac{1}{3}\right] = 27\ln 3$$

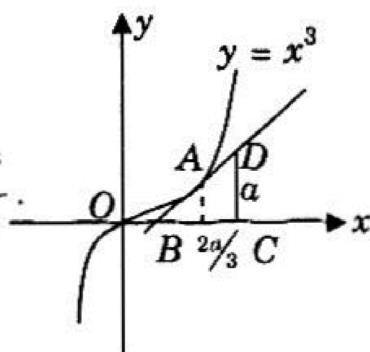
Vậy $S = 27\ln 3$ (đvdt).

Bài 2. Cho hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = 0$, $x = a$ $(a > 0)$, $y = x^3$. Nếu cắt hình thang cong bởi tiếp tuyến với đường cong $y = x^3$ vẽ tại điểm $x = \dfrac{2a}{3}$ ta được một tam giác. Hỏi rằng khi đó tỷ số diện tích giữa hình thang cong và tam giác bằng bao nhiêu ?

Giải

Dễ thấy diện tích hình thang cong là $\int_0^a (x^3 - 0)dx = \dfrac{x^4}{4}\Bigg|_0^a = \dfrac{a^4}{4}$.

Bây giờ ta lập phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = x^3$ tại $x = \dfrac{2a}{3}$.



Ta có $y' = 3x^2$

$y = 3.\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2\left(x - \dfrac{2a}{3}\right) + \left(\dfrac{2a}{3}\right)^3 = \dfrac{4a^2}{3}\left(x - \dfrac{2a}{3}\right) + \dfrac{8a^3}{27}$.

Đó là phương trình tiếp tuyến tại $A\left(\dfrac{2a}{3}\ ;\dfrac{8a^3}{27}\right)$.

Giả sử tiếp tuyến cắt đường thẳng $x = a$ tại D và cắt Ox tại B. Ta cần tìm tọa độ của hai điểm đó.

Dễ thấy $x_D = a$, suy ra $y_D = \frac{4a^2}{3}\left(a - \frac{2a}{3}\right) + \frac{8a^3}{27} = \frac{20a^3}{27}$

$$y_B = 0 = \frac{4a^2}{3}\left(x - \frac{2a}{3}\right) + \frac{8a^3}{27}, \text{ suy ra } x_B = \frac{4a}{9}.$$

Dẫn đến $D\left(a\ ;\frac{20a^3}{27}\right)$, $B\left(\frac{4a}{9}\ ;0\right)$, $C(a\ ;\ 0)$.

Đến đây ta tìm độ dài đoạn thẳng CD và BC. Ta có:

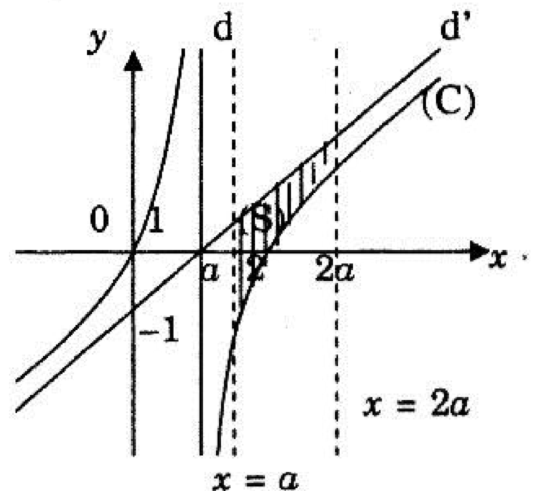
$$DC = \sqrt{\left(\frac{20a^3}{27}\right)^2} = \frac{20a^3}{27} \quad ; \quad BC = \sqrt{\left(a - \frac{4a}{9}\right)^2} = \frac{5a}{9}$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}DC.BC = \frac{1}{2}.\frac{20a^3}{27}.\frac{5a}{9} = \frac{50a^4}{243}$$

Vậy $\frac{S_1}{S_{BCD}} = \frac{a^4}{4} : \frac{50a^4}{243} = \frac{243}{200}$.

Bài 3. Vẽ (C): $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi (C), đường tiệm cận xiên của (C) và hai đường thẳng $x = a$ và $x = 2a$ với $a > 1$.

Giải



Vẽ (C): $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$

Ta có: $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = x - 1 - \frac{1}{x - 1}$

(C) có đường tiệm cận đứng là d: $x = 1$ và tiệm cận xiên là d': $y = x - 1$

$$y' = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x - 1)^2} > 0 \quad (\forall x \neq 1)$$

Suy ra hàm số luôn đồng biến.

S chính là diện tích phần gạch sọc ở hình vẽ bên.

Do d' ở phía trên (C) khi $x \in [a\ ;\ 2a]$.

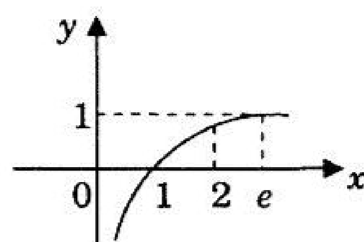
$$S = \int_a^{2a} \left|y_{(C)} - y_{(d')}\right| dx = \int_a^{2a}\left[(x - 1) - \left(x - 1 - \frac{1}{x - 1}\right)\right]dx = \int_a^{2a}\frac{dx}{x - 1} = \ln|x - 1|\Big|_a^{2a}$$

$$= \ln|2a - 1| - \ln|a - 1| = \ln\left|\frac{2a - 1}{a - 1}\right| \text{(đvdt)}$$

Bài 4. Tính thể tích vật tròn xoay được tạo nên do ta quay miền D được giới hạn bởi các đường: $y = \ln x$, $y = 0$ và $x = 2$ quay quanh trục Ox.

Giải

Thể tích vật tròn xoay do miền D quay quanh trục Ox là: $V = \pi\int_1^2 (\ln x)^2 dx$



Đặt $u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2\ln x\left(\frac{1}{x}dx\right)$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$V = \pi\left[uv\Big|_1^2 - \int_1^2 vdu\right] = \pi.x.\ln^2 x\Big|_1^2 - 2\pi\int_1^2 \ln xdx = \pi(2\ln^2 2) - 2\pi(x\ln x - x)\Big|_1^2$$

$$= 2\pi\ln^2 2 - 2\pi(2\ln 2 - 2 + 1) = 2\pi[\ln^2 2 - (2\ln 2 - 1)]$$

$\Rightarrow V = 2\pi(\ln 2 - 1)^2$ (đvtt)

Bài 5. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo nên bởi hình tròn $x^2 + (y-b)^2 \le a^2$ $(0 < a \le b)$ quay quanh trục Ox.

(Phân viện Báo chí và Tuyên truyền Hà Nội – 1995)

Giải

Gọi đường tròn (C) có tâm $I(0\ ;\ b)$ và bán kính $R = a$.

Ta có phương trình (C): $x^2 + (y-b)^2 = a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (C_1): y = b + \sqrt{a^2 - x^2} \\ (C_2): y = b - \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$

Gọi: • V_1 là thể tích sinh ra bởi hình thang cong $A'AFBB'$ quay quanh trục Ox

• V_2 là thể tích sinh ra bởi hình thang cong $A'AEBB'$ quay quanh trục Ox

• V là là thể tích sinh ra bởi hình tròn (C) quay quanh trục Ox

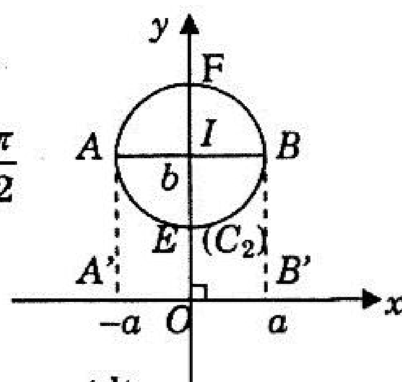
Ta có: $V = V_1 - V_2$

$$V = \pi\int_{-a}^{a}\left[b + \sqrt{a^2 - x^2}\right]^2 dx - \pi\int_{-a}^{a}\left[b - \sqrt{a^2 - x^2}\right]^2 dx$$

$$= \pi\int_{-a}^{a} 4b\sqrt{a^2 - x^2}dx = 4b\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

Đổi biến số tích phân $A = \int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx$

Đặt: $x = a\sin t \Rightarrow \begin{cases} dx = a\cos tdt \\ x = -a \Rightarrow \sin t = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ x = a \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$



Do đó: $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}.a\cos tdt = a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\, a\cos tdt$

$$= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \text{ (Do } \cos t > 0 \text{ với } \forall t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right))$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\pi$$

Vậy: $V = 4b\pi.\frac{a^2}{2}\pi = 2\pi^2 a^2 b$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y^2 = 4 - x$. Tính thể tích của vật thể tạo nên do sự quay quanh trục Oy của hình phẳng được giới hạn bởi parabol (P) và trục tung.

Giải

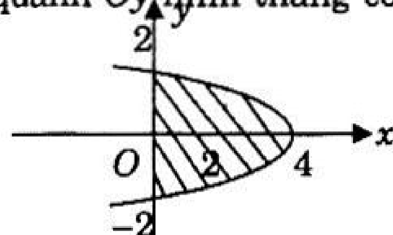
(P): $y^2 = 4 - x \Leftrightarrow x = 4 - y^2 = f(x)$

Phương trình tung độ giao điểm của (P) và Oy:

$4 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2$

Hình tròn xoay sinh ra khi cho quay quanh Oy hình thang cong giới hạn

bởi các đường: $\begin{cases} y = -2 \\ y = 2 \\ x = 0 \\ x = f(x) = 4 - y^2 \end{cases}$



Ta được:

$$V = \pi\int_{-2}^{2}(4-y^2)^2 dy = 2\pi\int_{0}^{2}(4-y^2)^2 dy = 2\pi\int_{0}^{2}(16y - 8y^2 + y^4)dy$$

$$= 2\pi\left(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi\left(32 - \frac{69}{3} + \frac{32}{5}\right) = \frac{512}{15}\pi$$

Vậy $V = \frac{512}{15}\pi$ (đvtt).

C. TOÁN TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $ax = y^2$; $ay = x^2$ ($a > 0$ cho trước).

(Cao đẳng Sư phạm TP.HCM – 1996)

Bài 2. Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = x - 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bài 3. Tính thể tích của hình tròn xoay sinh ra khi cho quay quanh Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y^2 = (x-1)^3 \\ x = 2 \end{cases}$

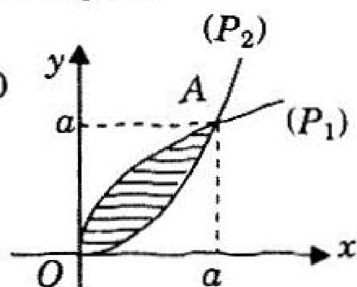
Bài 4. Tính thể tích vật thể tạo nên khi quay xung quanh trục Ox hình thang cong được giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4x + 5$ và $y = x + 1$.

D. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Gọi đồ thị (P_1): $ax = y^2$ và (P_2): $ay = x^2$

Do $a > 0 \Rightarrow x > 0, y > 0$ nên (P_1) và (P_2) chỉ cắt nhau ở góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng (Oxy). Tọa độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là:

$$\begin{cases} y = \sqrt{ax} \\ y = \dfrac{x^2}{a} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{ax} = \frac{x^2}{a} \Leftrightarrow a^3x = x^4 \Leftrightarrow x(x^3 - a^3) = 0$$



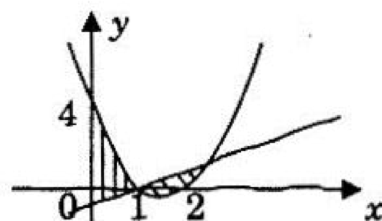
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 : \text{Gốc } O(0\ ;0) \\ x = a \Rightarrow y = a : \text{Điểm } A(a\ ;a) \end{array}\right.$$

Gọi S là diện tích cần tìm, ta có: $\forall x \in [0\ ; a]$: $y_{(P_1)} \geq y_{(P_2)}$

Do đó: $S = \int_0^a \left|\sqrt{ax} - \dfrac{x^2}{a}\right| dx = \int_0^a \left|\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{x^2}{a}\right| dx$

$$= \left(\sqrt{a}.\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^2}{3} \text{ (đvdt)}$$

Bài 2. Ta có: $S = \int_0^1 \left|(x^2 - 3x + 2) - (x - 1)\right| dx$



Ta lập bảng xét dấu:

$f(x) - g(x) = (x^2 - 3x + 2) - (x - 1) = x^2 - 4x + 3$

x	0	1	2
$f(x) - g(x)$	+	0	−

Suy ra:

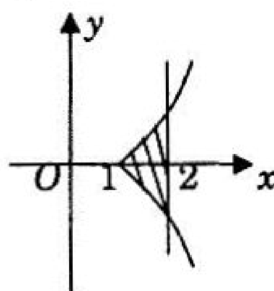
$$S = \int_0^1 \left[(x^2 - 3x + 2) - (x - 1)\right] dx + \int_1^2 \left[(x - 1) - (x^2 - 3x + 2)\right] dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx + \int_1^2 (-x^2 + 4x - 3)dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) + \left(-\frac{8}{3} + 8 - 6\right) - \left(\frac{1}{3} + 2 - 3\right) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2 \text{ (đvdt)}$$

Bài 3. $V = \pi\int_1^2 y^2 dx = \pi\int_1^2 (x - 1)^3 dx$



$$V = \pi\frac{(x - 1)^4}{4}\Bigg|_1^2 = \frac{\pi}{4}$$

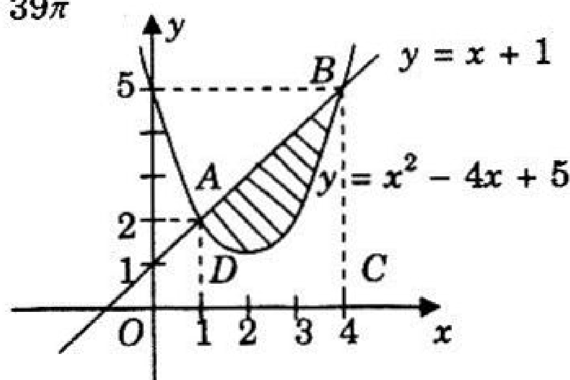
Vậy $V = \frac{\pi}{4}$ (đvtt).

Bài 4. Ta tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng và đường cong. Muốn vậy ta giải hệ phương trình: $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = x + 1 \end{cases}$

Dễ thấy $A(1 ; 2)$, $B(4 ; 5)$.

Từ hình vẽ ta có $V = V_1 - V_2$, ở đây V là thể tích vật thể cần tìm, còn V_1, V_2 là thể tích vật thể tạo nên khi quay xung quanh trục Ox hình thang $ABCD$ và hình thang cong $ABCD$. Bởi vậy ta có:

$$V_1 = \pi \int_1^4 (x+1)^2 dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Bigg|_1^4 = 39\pi$$



$$V_2 = \pi \int_1^4 (x^2 - 4x + 5)^2 dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{26x^3}{3} - 20x^2 + 25x \right) \Bigg|_1^4$$

$$= 15,6\pi$$

Vậy $V = 39\pi - 15,6\pi = 23,4\pi$ (đvtt).

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = -2x^2 + x + 3$ và trục hoành bằng:

(A) $S = \frac{125}{44}$; **(B)** $S = \frac{125}{34}$; **(C)** $S = \frac{125}{24}$; **(D)** $S = \frac{125}{14}$.

2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x$; $y = 0$; $x = e$ bằng:

(A) $S = 1$; **(B)** $S = 2$; **(C)** $S = e$; **(D)** $S = \frac{e}{2}$.

3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$ bằng:

(A) 1 ; **(B)** 2 ; **(C)** 3 ; **(D)** 4.

4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2 - x$ và trục hoành, và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ bằng:

(A) 3 ; **(B)** 2 ;

(C) 1 ; **(D)** Kết quả khác.

5. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x|x|$; $y = 0$; $x = -2$; $x = a > 0$ là $S = \frac{16}{3}$ (đvdt). Giá trị a là:

(A) $a = 1$; **(B)** $a = 2$; **(C)** $a = \frac{5}{2}$; **(D)** $a = 3$.

6. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - a$ và $y = -x^2 + a$ $(a > 0)$. Biết diện tích của D là $S = \frac{8}{3}$ (đvdt). Giá trị a là

(A) $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$; **(B)** $a = \sqrt{3}$; **(C)** $a = 3\sqrt{3}$; **(D)** $a = 2\sqrt{3}$.

7. Số đo diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - x$ và $y = 3x$ bằng:

(A) $\frac{32}{3}$; **(B)** $\frac{16}{3}$; **(C)** $\frac{14}{3}$; **(D)** 32.

8. Số đo diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^3 - x$ và $y = 3x$ bằng:

(A) 4 ; **(B)** 8 ; **(C)** 16 ; **(D)** 32.

9. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^3 - x^2$ và đường thẳng $y = 4x - 4$ bằng:

(A) $S = \frac{19}{3}$; **(B)** $S = \frac{17}{2}$; **(C)** $S = \frac{61}{6}$; **(D)** $S = \frac{71}{6}$.

10. Biết một nguyên hàm của $x\ln x$ là $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 1$; $x = e$; $y = 0$ và $y = x\ln x$ bằng:

(A) $S = \frac{e^2}{4}$; **(B)** $S = \frac{e^2+1}{4}$; **(C)** $S = \frac{e^2}{2}$; **(D)** $S = \frac{e^2+1}{2}$.

11. Cho đường cong (C): $y = \sqrt{\sin^6 x + \cos^6 x}$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi (C), hai trục tọa độ và đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$. Thể tích vật thể sinh ra khi cho D quay xung quanh Ox bằng:

(A) $V = \frac{11\pi^2}{16}$; **(B)** $V = \frac{9\pi^2}{16}$; **(C)** $V = \frac{7\pi^2}{16}$; **(D)** $V = \frac{5\pi^2}{16}$.

12. Cho đường cong (C): $y = \sqrt{x}$. D là hình phẳng tạo bởi trục Oy và đường thẳng $y = m$ $(m > 0)$. Cho D quay xung quanh Oy ta được một vật thể tròn xoay có thể tích $V = \frac{32\pi}{5}$ (đvtt). Giá trị m bằng:

(A) $m = 1$; **(B)** $m = 2$; **(C)** $m = 3$; **(D)** $m = 4$.

13. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2$, $y = 4$, $x = 0$. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh Oy bằng:

(A) 12π; **(B)** 10π; **(C)** 8π; **(D)** 6π.

14. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh Oy bằng:

(A) πe^2 ; **(B)** $\frac{\pi(e^2+1)}{2}$;

(C) $4\pi e^2$; **(D)** Kết quả khác.

15. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$; $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$; $x = 0$.
Cho H quay xung quanh Ox. Thể tích vật thể tạo thành bằng:
(A) $V = \pi(4 - 3\ln 2)$; (B) $V = \pi(4 + 3\ln 2)$;
(C) $V = \pi(3 - 4\ln 2)$; (D) $V = \pi(3 + 4\ln 2)$.

16. D là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = 1 - x^3$ và hai trục tọa độ. Thể tích vật thể sinh ra khi cho D quay xung quanh trục tung bằng:
(A) $V = \dfrac{3\pi}{5}$; (B) $V = \dfrac{4\pi}{5}$; (C) $V = \pi$; (D) $V = \dfrac{6\pi}{5}$.

17. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$.
Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh Ox bằng:
(A) $\dfrac{\pi^2}{8}$; (B) $\dfrac{\pi(\pi+2)}{8}$;
(C) $\dfrac{\pi^2+1}{4}$; (D) Kết quả khác.

18. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đường $y = 0$, $y = x - x^2$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh Ox bằng:
(A) $\dfrac{\pi}{30}$; (B) $\dfrac{\pi}{15}$; (C) $\dfrac{\pi}{10}$; (D) $\dfrac{\pi}{5}$.

19. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $x = 0$; $y = e$ và $y = e^x$. (Biết một nguyên hàm của $\ln^2 x$ là $x\ln^2 x - 2x(\ln x - 1)$). Thể tích vật thể sinh ra khi cho D quay xung quanh trục tung bằng:
(A) $V = \pi(e + 2)$; (B) $V = \pi(e - 2)$;
(C) $V = \pi(e + 1)$; (D) $V = \pi(e - 1)$.

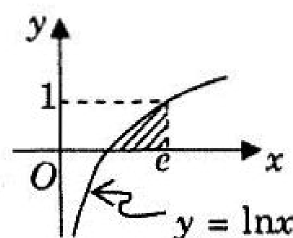
20. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x^3$; $y = 1$; $x = 0$. Thể tích của vật thể sinh ra khi cho D quay xung quanh trục tung bằng:
(A) $V = \pi$; (B) $V = \dfrac{4\pi}{5}$; (C) $V = \dfrac{3\pi}{5}$; (D) $V = \dfrac{2\pi}{5}$.

B. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	(C)	(A)	(B)	(C)	(B)	(A)	(A)	(B)	(D)	(B)

Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	(D)	(B)	(A)	(B)	(C)	(A)	(B)	(A)	(B)	(D)

C. HƯỚNG DẪN CHỌN ĐÁP ÁN



1. Parabol $y = -2x^2 + x + 3$ cắt Ox tại $x = -1$ và $x = \dfrac{3}{2}$

Ta có $S = \displaystyle\int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left|-2x^2 + x + 3\right| dx = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} (-2x^2 + x + 3)dx$

(vì $-2x^2 + x + 3 \geq 0$ khi $x \in \left[-1\,;\frac{3}{2}\right]$)

Vậy $S = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x\Big|_{-1}^{\frac{3}{2}} = \frac{125}{24}$ (đvdt). Chọn **(C)**.

2. Đường cong $y = \ln x$ cắt Ox tại $x = 1$ và $\ln x \geq 0$ khi $x \in [1\,;e]$

Vậy $S = \int_1^e \ln x dx$ $\quad\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow u = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$S = x.\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x.\frac{dx}{x} = e - (e-1) = 1 \text{ (đvdt)}.$$ Chọn **(A)**.

3. Từ giả thiết ta có:

$$S = \int_0^{\pi}|\sin x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin xdx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2.$$ Chọn **(B)**.

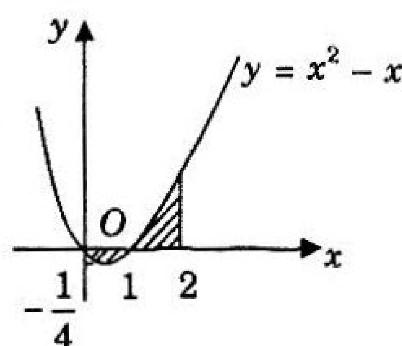
4. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - x$ và trục hoành: $x^2 - x = 0$

$\Leftrightarrow$ ($x = 0$ hoặc $x = 1$)

Ta có:

$$S = \int_0^2|x^2 - x|dx = -\int_0^1(x^2 - x)dx + \int_0^1(x^2 - x)dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 1.$$ Chọn **(C)**.

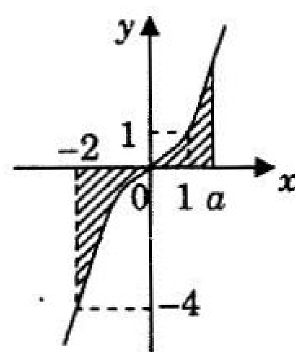


5. $S = \int_{-2}^{0}x^2dx + \int_0^a x^2dx$

$= \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^a$

$= \frac{8}{3} + \frac{a^3}{3} = \frac{16}{3}$

$\Leftrightarrow a = 2$. Chọn **(B)**.

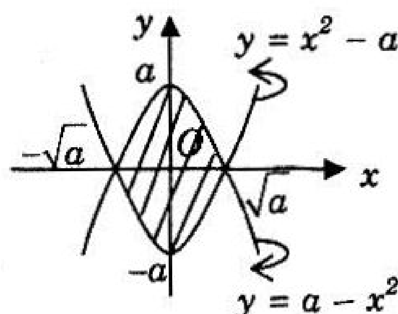


6. Do tính đối xứng của hình vẽ ta có:

$$S = 4\int_0^{\sqrt{a}}(a - x^2)dx = 4\left(ax - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\sqrt{a}}$$

$$= 4\left(a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3}\right) = \frac{8a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $\frac{8a\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Chọn **(A)**.



7. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^2 - x$ và $y = 3x$

$x^2 - x = 3x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ hoặc $x = 4)$

Ta có: $S = \int_0^4 |(x^2 - x) - 3x|dx = \int_0^4 |x^2 - 4x|dx = \int_0^4 (4x - x^2)dx$

$$= \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}.$$ Chọn **(A)**.

8. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^3 - x$ và $y = 3x$:

$x^3 - x = 3x \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = -2)$

Do đó diện tích của hình phẳng là:

$$S = \int_2^2 |(x^3 - x) - 3x|dx = \int_{-2}^2 |x^3 - 4x|dx = \int_{-2}^0 |x^3 - 4x|dx + \int_0^2 |x^3 - 4x|dx$$

$$S = \left|\int_{-2}^0 (x^3 - 4x)dx\right| + \left|\int_0^2 (x^3 - 4x)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]\Bigg|_{-2}^0\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]\Bigg|_0^2\right| = 8.$$

Chọn **(B)**.

9. • Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là:

$$x^3 - x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$$

• $S = \int_{-2}^1 |(x^3 - x^2) - (4x - 4)|dx = \int_{-2}^1 (x^3 - x^2 - 4x + 4)dx$

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x^3 - x^2 - 4x + 4$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

* Vậy $S = \int_{-2}^1 (x^3 - x^2 - 4x + 4)dx + \int_1^2 (-x^3 + x^2 + 4x - 4)dx$

• $\int_{-2}^1 (x^3 - x^2 - 4x + 4)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Bigg|_{-2}^1 = \frac{45}{4}$

• $\int_1^2 (-x^3 + x^2 + 4x - 4)dx = \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{7}{12}$

Vậy $S = \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \frac{71}{6}$ (đvdt). Chọn **(D)**.

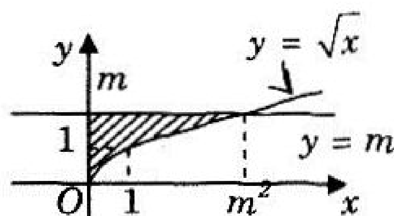
10. $S = \int_1^e x\ln x dx = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1)\Bigg|_1^e = \frac{e^2}{4}(2 - 1) - \frac{1}{4}(0 - 1) = \frac{e^2 + 1}{4}$. Chọn **(B)**.

11. $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 dy = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^6 x + \cos^6 x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right)dx$

$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x\right)dx = \pi\left(\frac{5}{8}x + \frac{3}{32}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi^2}{16}$ (đvtt). Chọn **(D)**.

12. $V = \pi\int_0^m x^2dy = \pi\int_0^m y^4dy = \pi.\frac{y^5}{5}\Big|_0^m$

$= \frac{\pi m^5}{5} = \frac{32\pi}{5} \Leftrightarrow m = 2$. Chọn **(B)**.



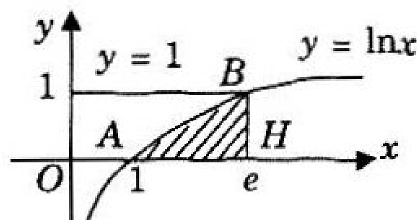
13. Phương trình $y = \frac{x^2}{2}$ viết lại $x^2 = 2y$

Ta có: $V = \pi\int_2^4 x^2dy = 2\pi\int_2^4 ydy = \pi y^2\Big|_2^4 = 12\pi$. Chọn **(A)**.

14. Ta có $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$ ($x \in [1\ ;\ e]$ $\Leftrightarrow y \in [0\ ;\ 1]$)

+ V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = e$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ quay xung quanh trục Oy.

(V_1 chính là thể tích khối trụ có bán kính đáy $R = e$ và chiều cao $h = 1$)



+ V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = e^y$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ quay xung quanh trục Oy

Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) là:

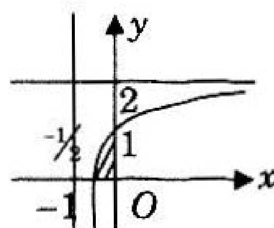
$$V = V_1 - V_2 = \pi.e^2.1 - \pi\int_0^1 (e^y)^2dy = \pi e^2 - \frac{\pi}{2}e^{2y}\Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2+1)}{2}$$. Chọn **(B)**.

15. $V = \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{0} y^2dx = \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2 dx = \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(2 - \frac{1}{x+1}\right)^2 dx$

$= \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(4 - \frac{4}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$

$= \pi\left(4x - 4\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}$

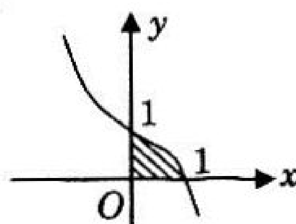
$= \pi(3 - 4\ln 2)$ (đvtt). Chọn **(C)**.



16. $V = \pi\int_0^1 x^2dy = \pi\int_0^1 (1-y)^{\frac{2}{3}}dy$

$= -\frac{3\pi}{5}(1-y)^{\frac{5}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{5}$ (đvtt)

Chọn **(A)**.



17. Ta có: $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1 + \cos 2x)dx$

$= \frac{\pi}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi(\pi+2)}{8}$. Chọn **(B)**.

18. Gọi (C): $y = x - x^2$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ hoặc $x = 1)$

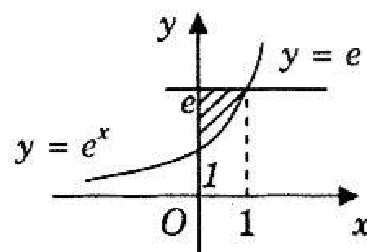
Do đó: $V = \pi\int_0^1 (x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{30}$.

Chọn **(A)**.

19. $V = \pi\int_1^e x^2 dy = \pi\int_1^e (\ln^2 y)dy$

$= \pi\left[y\ln^2 y - 2y(\ln y - 1)\right]\Bigg|_1^e$

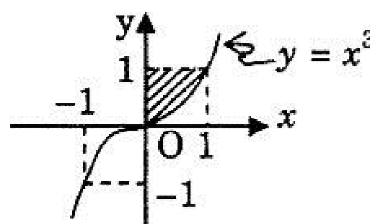
$= \pi(e - 2)$ (đvtt)



Chọn **(B)**.

20. $V = \pi\int_0^1 x^2 dy = \pi\int_0^1 (\sqrt[3]{y})^2 dy$

$= \pi\int_0^1 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{2\pi}{5} y^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{5}$ (đvtt).



Chọn **(D)**.

MỤC LỤC

CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐIỂN HÌNH GIẢI TOÁN NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Nguyễn Văn Lộc (cb),
Nguyễn Dương Hoàng, Hoàng Ngọc Cảnh, Nguyễn Ngọc Giang

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 39714896: (04) 39724770; Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Chịu trách nhiệm nội dung

Biên tập: HỮU NGUYÊN

Trình bày bìa: QUỐC VIỆT

Đối tác liên kết xuất bản

CÔNG TY SÁCH – THIẾT BỊ GIÁO DỤC ĐỨC TRÍ

Mã số: 1L-21 ĐH2009
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Trung tâm Mỹ thuật ứng dụng
Số xuất bản: 35-2009/CXB/03-221/ĐHQGHN, ngày 8/01/2009
Quyết định xuất bản số: 21 LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2009.